청년 비트겐슈타인의 수리철학

이 승 종 (연세대)

주 제 수리철학, 논리철학, 비트겐슈타인

주요어 수학, 논리학, 수, 『논리철학논고』, 무한공리

요약문 비트겐슈타인에 의하면 (1) 모든 명제는 요소명제들에 N(ξ)이라는 조작을 잇따라 적용함으로써 얻어지며, (2) 이 조작의 적용은 한 명제에서 다른 명제로의 이행의 가장 일반적인 형식을 제시한다. 이 글에서 우리는 비트겐슈타인을 좇아 한 명제에서 다른 명제로의 이행을 매개하는 이 조작과 수의 개념 사이에 내적 연관이 있음을 밝힌다. 수는 바로 이 조작의 지수로 정의된다.

0. 비트겐슈타인의 『논리철학논고』(이하 『논고』로 약칭)에 관한 연구로 1975년 미국 에모리대학에서 철학박사 학위를 취득한 이래 연세대에서 20여년 간 비트겐슈타인을 가르치고 연구해온 박영식 교수가 『비트겐슈타인 연구: 『논리철학논고』의 해명』을 출간하였다. 『논고』에 대한 박영식 교수의 평생에 걸친 연구의 결과인 이 연구서는 서우철학상을 수상함으로써 이미 한국의 철학계 내에서 높은 평가를 받은 바 있다. 박영식 교수의 저서에 의해 비트겐슈타인의 『논고』에 대한 국내의 연구는 이제 건실한 초석을 얻게 되었다. 남은 과제는 이를 바탕으로 더 넓고 더 깊은 연구를 쌓아 올리는 것이다. 이 글도 이러한 과제의 실현에 일조하기 위한 것이다.

1. 비트겐슈타인의 수리철학은 별 주목을 받지 못했던 것이 사실이다.[1] 심지어 그는 수학의 문외한으로까지 묘사되곤 했다(Shanker 1986a, p. 1). 비트겐슈타인의 청년기 저작인 『논고』에 개진된 수리철학은 특히 거의 무시되거나 오해되었

다. 베나세라프와 퍼트남은 그들이 편집한 현대 수리철학의 한 고전에서 다음과 같이 말한다.

> 『논고』에서 비트겐슈타인은 러셀과 프레게를 좇아 수학이 논리학으로 환원될 수 있다고 주장했다. (Benacerraf and Putnam 1964, p. 14)

반면 블랙은 『논고』에 대한 그의 권위 있는 주석서에서 다음과 같이 말하고 있다.

> 비트겐슈타인은 화이트헤드와 러셀 식으로 수학이 논리학으로 환원될 수 있다고 보지 않는다. (Black 1964, p. 340)

이처럼 저명한 학자들 사이에도 의견이 엇갈리고 있기에 『논고』의 수리철학에 대한 올바른 이해는 더욱 절실히 요청된다.

2. 전통적인 순수 수학의 모든 분야가 자연수론으로부터 이끌어져 나온다는 것은 비교적 근래에 이르러서야 알려진 사실이다. 페아노는 자연수론이 세 가지 기본 개념과 다섯 개의 공리로부터 논리학의 도움만으로 이끌어져 나올 수 있음을 입증하였다. 페아노가 상정한 다섯 개의 공리는 다음과 같다.

1. 0은 하나의 수이다.
2. 어떤 임의의 수의 후자(successor)도 또한 하나의 수이다.
3. 두 수는 같은 후자를 갖지 않는다.
4. 0은 어떠한 수의 후자도 아니다.
5. 어떤 속성이 0에 속하며 또 그 속성을 가지는 임의의 수의 후자에도 속한다면, 그 속성은 모든 수에 속한다. (Russell 1919, pp. 5-16)

---

1) 비트겐슈타인의 수리철학에 대한 필자의 글들을 참조할 것. 이승종, 「비트겐슈타인의 수리철학 논쟁」, 『연세철학』, 3호, 1991; 「모순에 관한 튜링/비트겐슈타인 논쟁」, 『철학연구』, 33집, 1993; 「비트겐슈타인의 괴델 읽기」, 『철학』, 53집, 1997; 「후설과 비트겐슈타인의 수리철학」, 『현대비평과 이론』, 13호, 1997; 「반시대적 고찰: 비트겐슈타인과 하이데거의 수리논리학 비판」, 한국현상학회 편, 『역사와 현상학』, 서울: 철학과현실사, 1999.

여기서 수(즉 자연수), 0, 후자가 기본 개념이다.

러셀은 (1) 이 기본 개념들이 명확한 정의를 통해 논리적 개념으로부터 이끌어져 나올 수 있으며, (2) 위의 공리들이 사실은 논리적 연역을 통해 논리학의 공리로부터 이끌어낼 수 있는 정리임을 골격으로 하는 논리주의를 주장한다. 그의 이러한 두 주장을 차례로 정리해보자.

(1) 페아노의 기본 개념들은 집합 개념에 의해 다음과 같이 정의될 수 있다. 어떤 집합의 수는 그 집합과 대등한 모든 집합의 집합이다. 0은 공집합만을 원소로 하는 집합의 집합이다. 집합 α가 가진 원소의 수의 후자라 함은 α의 원소와 α에 속하지 않는 임의의 항 x로 이루어지는 집합의 원소의 수이다. 0을 원소로 가지며 그 어떠한 원소의 후자 또한 원소로 갖는 집합을 귀납적 집합으로 정의한다.[2]

(2) 이러한 정의에 의해 페아노의 공리 1과 5는 정의로부터 귀결되는 것임이 드러난다. 2와 4도 정의를 이용하여 쉽게 증명될 수 있다. 그러나 공리 3에 대해서는 어려움이 있다. 세계가 무한히 많은 개별자를 포함하지 않는다면 일정한 한계를 넘어서부터는 모든 수가 공집합으로 서로 동일하게 되어버릴 것이다.[3] 이러한 불합리를 방지하기 위해서는 세계가 무한히 많은 개별자를 포함한다는 내용을 골자로 하는 무한 공리가 요청된다. 무한 공리의 도움으로 러셀은 페아노의 세 기본 개념에 대한 정의뿐 아니라 공리 3을 포함하는 페아노의 모든 공리가 정리임을 증명한다.

3. 수에 대한 러셀의 정의를 위해서 우리는 집합의 존재를 상정해야 한다.[4] 이는 다시 무한히 많은 개별자의 존재에 근거해 있다. 그러나 무한 공리는 논리적 진리가 아니라 경험적 전제일 뿐이다. 수에 대한 자신의 논리적 정의를 정당화하

2) 자세한 내용은 다음을 참조. Russell 1919, 2~3장.

3) 예컨대 세계 안의 개별자가 모두 10개라고 한다면 11개의 원소를 가지는 집합은 존재하지 않으므로 수 11은 공집합이다. 마찬가지로 수 12도 공집합이며 따라서 11 = 12가 된다.

4) 사실 집합 개념은 다음과 같이 정의되는 "유도된 외연적 함수"(derived extensional function)라는 개념을 도입함으로써 소거될 수 있다. ""함수 $\varphi(x)$로 정의된 집합이 성질 φ를 갖는다"라는 것을 주장하는 것은 "$\varphi(x)$가 φ에서 유도된 외연적 함수를 만족시킨다"는 것을 주장하는 것이다"(Russell 1919, p. 188).

기 위해 러셀은 경험적 전제에 의존하고 있는 셈이다.[5] 러셀도 무한 공리의 경험적 성격을 다음과 같이 시인하고 있다.

> 무한 공리는 어떤 가능 세계에서는 참이며 다른 가능 세계에서는 거짓이다. 그것이 이 현실 세계에서 참인지 아닌지에 대해서 우리는 알 수 없다. (Russell 1919, p. 141)

상호 독립적이면서 그 수에 있어서 무한한 개별자의 존재 여부가 어떻게 경험적으로 알려질 수 있겠는가? 수학을 논리적 진리에 정초 시키려는 러셀의 논리주의가 이처럼 불확실한 경험적 토대 위에 있어도 되는 것인가?

비트겐슈타인은 이 지점에서 논의에 개입한다. 그는 다음과 같이 말한다.

> 집합론은 수학에서 전적으로 불필요한 것이다.
>
> 이것은 우리가 수학에서 필요로 하는 일반성이 우연적인 일반성이 아니라는 것과 연관되어 있다. (TLP, 6.031)

위의 인용문에서 두 번째 명제는 러셀의 무한 공리를 겨냥하고 있다.

4. 비트겐슈타인은 이제 집합론에 의존하지 않으면서 수에 대한 새로운 이해를 시도하려 한다. 그에 의하면 수는 형식적 개념이다. 그러한 개념을 제시하는 것은 집합이 아니라 변항이다.

> [수는] 형식적 개념을 나타내며, 개념표기법에서 (프레게나 러셀이 믿었던 것처럼) 함수나 집합에 의해 제시되는 것이 아니라 변항에 의해 제시된다. (TLP, 4.1272)

이를 바탕으로 비트겐슈타인은 집합을 매개로 자연수론을 논리학으로 환원시키려는 러셀의 시도를 배격한다. 비트겐슈타인의 입장에서 볼 때 자연수의 집합이란 없다.

---

5) 집합 대신 함수 개념을 사용한다 해도 사정은 마찬가지이다. 우리는 충분히 포괄적인 치역을 갖는 함수의 존재에 관한 문제에 봉착하게 된다.

> "1은 하나의 수이다," "0은 하나밖에 없다"와 같은 표현들, 그리고 이와 비슷한 모든 표현들은 무의미하다. (TLP, 4.1272)

변항은 대입을 위한 자리이므로 변항 개념은 언제나 대입법에 연관된다. 비트겐슈타인은 대입법을 수학적 방법의 본질로 본다. 등식이 두 표현간의 대입 가능성을 표현하고 있다는 점에서 수학의 명제는 등식으로 간주된다(TLP, 6.2).[6]

5. 비트겐슈타인의 논의에 깔려 있는 하나의 지침은 수학적 대상의 도입을 피하자는 것이다. 그러나 여전히 우리는 수란 무엇인가 하는 문제를 비트겐슈타인에게도 던지지 않을 수 없다. 그는 이 문제를 진리 함수에 관한 논의로부터 접근한다. 모든 진리 함수는 요소명제들에 N($\bar{\xi}$)이라는 조작을 잇따라 적용함으로써 얻어진다(TLP, 5.502). $\bar{\xi}$는 괄호 쳐진 표현의 항들을 그것의 값으로 삼는 변항이고, 변항 위의 선은 변항이 괄호 속에 있는 모든 값들을 대표한다는 것을 나타낸다(TLP, 5.501). N은 임의의 수의 명제 변항들의 동시 부정을 낳는다. N은 하나의 변항에 적용되었을 때에는 부정과 동일한 결과를 낳지만 두 변항 이상에 적용되었을 때에는 부정과는 다른 다음과 같은 진리값을 갖는 동시 부정을 낳는다(Kenny 1973, p. 87).

P	N(p)
T	F
F	T

p	q	N(p, q)
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	r	N(p, q, r)
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

6) 램지(Ramsey 1931, pp. 17, 282)는 수학에 부등식도 있다는 점을 들어 비트겐슈타인의 견해를 지나치게 협소한 것으로 비판한다.

비트겐슈타인의 N은 종종 세퍼의 "|"와 동일한 것으로 오해되어 왔다. 블랙(Black 1964, p. 277), 파볼트(Favrholt, 1967), 혹버그(Hochberg 1971, pp. 537-538), 마리온(Marion 1998, p. 25), 마운스(Mounce 1981, pp. 52-53) 등과 같은 비트겐슈타인 학자들이 공통적으로 이러한 오류를 범했다. 그래서 예컨대 파볼트는 2항 관계를 나타내는 "|"나 "v," "⊃," "·"와 같은 기호들이 그러하듯이 N도 셋 이상의 명제에는 동시에 적용될 수 없다고 보았다. (예컨대 "p v q v r"은 적형식이 아니다.) 심지어 그는 비트겐슈타인이 이러한 특성을 간파하지 못할 만큼 논리학에 무지했다고 비난하고 있다(Favrholt, 1967, p. 134). 그러나 위의 진리표에서 보듯이 무지의 혐의는 파볼트 자신에게 전가된다. 사실 다음에서 보듯이 비트겐슈타인의 N은 "|"보다 "↓"에 가깝다.

p	q	p | q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

p	q	p↓q
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

그러나 "↓"도 2항 관계에만 적용된다는 점에서 N과 구별되기는 마찬가지이다.

비트겐슈타인은 (1) 모든 명제는 요소명제들에 N(ξ)이라는 조작을 잇따라 적용함으로써 얻어지며(TLP, 6.001), (2) 이 조작의 적용은 한 명제에서 다른 명제로의 이행의 가장 일반적인 형식을 제시한다(TLP, 6.01)고 주장한다. 이러한 주장을 차례로 살펴보자.

(1) 다음의 진리표에서 보여지는 것과 같이 두 요소명제에 대해 16개의 가능한 진리 함수가 있다.

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T	T	T	F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	F	T	T	F	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F	T	F	F	F	F

이제 표에서 나타나는 모든 명제가 요소명제에 조작 N을 잇따라 적용함으로써 얻어질 수 있는지를 보일 차례이다. 그 결과는 다음과 같다.

1. N(N(p, N(p)))	$p \vee \sim p$
2. N(N(N(p), N(q)))	$\sim(p \cdot q)$
3. N(N(N(N(N(p, q), N(N(p), N(q))), q)))	$p \supset q$
4. N(N(N(N(N(p, q), N(N(p), N(q))), p, N(p, q))))	$q \supset p$
5. N(N(p, q))	$p \vee q$
6. N(p)	$\sim p$
7. N(q)	$\sim q$
8. N(N(p, q), N(N(q), N(p)))	$(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim p)$
9. N(N(N(p, q), N(N(p), N(q))))	$p \equiv q$
10. 요소명제	q
11. 요소명제	p
12. N(p, q)	$\sim p \cdot \sim q$
13. N(N(N(N(p, q), N(N(p), N(q))), p, N(p, q)))	$q \cdot \sim p$
14. N(N(N(N(p, q), N(N(p), N(q))), q))	$p \cdot \sim q$
15. N(N(p), N(q))	$p \cdot q$
16. N(p, N(p))	$p \cdot \sim p$

우리는 두 명제의 진리 함수가 어떻게 요소명제들로부터 조작 N에 의해 구성될 수 있는지를 살펴보았다. 비트겐슈타인은 모든 명제들이 이러한 특징을 공유하고 있다고 본다. 그러므로 명제의 일반 형식은 다음과 같이 정식화된다(TLP, 6).

(1) $[\bar{p}, \xi, N(\xi)]$

여기서 "$\bar{p}$"는 요소명제들의 집합이다. 명제의 일반 형식은 요소명제들의 진리 함수가 명제임을 함축한다.

(2) 조작 N은 진리 조작뿐만 아니라 한 명제로부터 다른 명제로의 모든 논리적 이행을 구성한다. 따라서 비트겐슈타인은 조작 N을 이용해 한 명제로부터 다른 명제로의 이행에 관한 일반 형식 $\Omega'(\bar{\eta})$을 다음과 같이 정식화한다(TLP, 6.01).

(II) $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\bar{\eta})$ ($= [\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$)

$\Omega'(\bar{\eta})$은 명제의 집합 η으로부터 그것의 진리 함수를 얻기 위해 요구되는 조작이다.

비트겐슈타인은 이즈음에서 "이렇게 하여 우리는 수(數)에 이른다"(TLP, 6.02)고 말한다. 그는 한 명제에서 다른 명제로의 이행을 매개하는 조작과 수의 개념 사이에 내적 연관이 있다고 보는 것이다.

6. 비트겐슈타인은 임의의 출발점에서부터 시작해서 명제의 일반 형식을 잇따라 적용함으로서 얻어지는 형식 계열을 살펴본다. 그 계열은 다음과 같은 것이다(TLP, 6.02).

(III) $x, \Omega'x, \Omega'\Omega'x, \Omega'\Omega'\Omega'x, \cdots$

비트겐슈타인은 이를 다음과 같이 정의한다(TLP, 6.02).

(IV) $x = \Omega^{0'}x$ Def.,

$\Omega'\Omega'x = \Omega^{\nu+1'}x$ Def.

이러한 정의에 의거하여 비트겐슈타인은 (I)을 다음과 같이 쓴다(TLP, 6.02).

(V) $\Omega^{0'}x, \Omega^{0+1'}x, \Omega^{0+1+1'}x, \cdots$

그리고 그는 (II)에 해당하는 $[x, \xi, \Omega'\xi]$를 다음과 같이 쓴다(TLP, 6.02).

(VI) $[\Omega^{0'}x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$

그러고 나서 비트겐슈타인은 다음과 같은 정의를 제시한다(TLP, 6.02).

(VII) $0 + 1 = 1$ Def.,

$0 + 1 + 1 = 2$ Def.,

$0 + 1 + 1 + 1 = 3$ Def.,

(등등)

우리는 이러한 과정을 통해 수(數)와 형식적 조작(x, $\Omega' x$, $\Omega' \Omega' x$, $\Omega' \Omega' \Omega' s$, …) 사이의 유사성 내지는 내적 연관성을 확인하게 된다. 여기서 우리는 수에 대한 다음의 정의에 이르게 된다.

> 수는 조작의 지수이다. (TLP, 6.021)

이는 수를 포함하는 어떠한 문장도 조작의 적용을 가리키는 문장으로 번역될 수 있음을 의미한다. 예컨대 '2 × 2 = 4'는 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다(TLP, 6.241).

$$(\Omega^{\nu})^{\mu\prime} x = \Omega^{\nu \times \mu\prime} x \text{ Def.},$$
$$\Omega^{2 \times 2\prime} x = (\Omega^{2})^{2\prime} x = \Omega^{2\prime} \Omega^{2\prime} x = \Omega^{4\prime} x$$

그리고 이는 다시 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다(TLP, 6.241).

$$\Omega^{2\prime} \Omega^{2\prime} x = \Omega^{1+1\prime}\ \Omega^{1+1\prime} x = (\Omega' \Omega)' (\Omega' \Omega)' x = \Omega'\ \Omega'\ \Omega' \Omega' x = \Omega^{1+1+1+1\prime} x = \Omega^{4\prime} x$$

이제 수는 형식적 조작의 적용의 과정을 참조함으로써 해명됨이 분명해졌다. 이는 『논고』 이후의 비트겐슈타인이 지녔던 견해와도 잘 어울린다.

> 산술은 수에 관해 말하는 것이 아니라 수와 함께 전개된다.
>
> ……
>
> 모든 수학적 계산은 그 자신의 적용이며 그럼으로써만 의미를 지닌다. (PR, p. 109)

요컨대 조작의 적용이 수를 해명하는 것이지 그 역은 아닌 것이다.

7. 『논고』의 수리철학에 대한 블랙과 베나세라프/퍼트남의 상반된 해석에 관한 논의로 되돌아가 보자. 비트겐슈타인은 수학이 화이트헤드와 러셀이 생각한 방식으로 논리학으로 환원될 수 있다고 보았는가? 이 물음에 대한 비트겐슈타인의 대답은 다음과 같다.

수학은 논리학의 한 방법이다. (TLP, 6.234)

이는 수학이 논리학에서 비롯된다는 말과는 다르다. 그러나 수학과 논리학 사이에는 여전히 내적 관계가 존재한다. 그 관계는 지금까지 살펴보았듯이 기본적인 논리적 조작에 의해 한 명제가 다른 명제로부터 도출된다는 점에 놓여 있다. 이러한 방식의 관계 맺기는 화이트헤드/러셀의 논리주의, 그리고 수가 어떤 존재를 지칭하는 것이라는 수학적 대상에 관한 존재론을 동시에 지양한다는 점에서 주목할 만한 것으로 평가된다.

참고문헌

박영식, (1998) 『비트겐슈타인 연구 : 『논리철학논고』의 해명』. 서울 : 현암사.

이승종, (1991) 「비트겐슈타인의 수리철학 논쟁」,『연세철학』, 3호.

______, (1993) 「모순에 관한 튜링/비트겐슈타인 논쟁」, 『철학연구』, 33집.

______, (1997a) 「비트겐슈타인의 괴델 읽기」, 『철학』, 53집.

______, (1997b) 「후설과 비트겐슈타인의 수리철학」, 『현대비평과 이론』, 13호.

______, (1999) 「반시대적 고찰: 비트겐슈타인과 하이데거의 수리논리학 비판」, 한국현상학회 1999에 수록.

한국현상학회 편. (1999) 『역사와 현상학』. 서울: 철학과현실사.

Benacerraf, P., and H. Putnam. (eds.) (1964) *Philosophy of Mathematics*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Black, M. (1964) *A Companion to Wittgenstein's 'Tractatus.'* Ithaca: Cornell University Press.

Favrholt, D. (1967) *An Interpretation and Critique of Wittgenstein's Tractatus*. Copenhagen: Munksgaard.

Hochberg, H. (1971) "Arithmetic and Propositional Form in Wittgenstein's *Tractatus*," Klemke 1971에 수록.

Kenny, A. (1973) *Wittgenstein*. London: Penguin Press.

Klemke, E. D. (ed.) (1971) Essays on *Wittgenstein*. Urbana: University of Illinois Press.

Marion, M. (1998) *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Mounce, H. (1981) *Wittgenstein's Tractatus*. Oxford: Basil Blackwell.

Ramsey, F. (1931) *The Foundations of Mathematics*. Ed. R. B. Braithwaite. London: Routledge and Kegan Paul.

Russell, B. (1919) *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: George Allen and Unwin.

Shanker, S. (1986a) "Introduction: The Portals of Discovery," Shanker 1986b 에 수록.

Shanker, S. (ed.) (1986b) *Ludwig Wittgenstein: Critical Assessments, vol. III*. London: Croom Helm.

Wittgenstein, L. (TLP) *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trans. D. Pears and B. McGuinness. London: Routledge and Kegan Paul, 1961.

______, (PR) *Philosophical Remarks*. Ed. R. Rhees, trans. R. Hargreaves and R. White. Oxford: Basil Blackwell, 1975.