타르스키定理, 처치定理, 그리고 괴델定理

金 泳 楨
(외 대)

Ⅰ. 들어가는 말

산술적 진리의 정의불가능성에 관한 타르스키의 정리, 논리학 결정불가능성에 관한 처치의 정리, 산술의 불완전성에 관한 괴델의 정리는 모두 현대 수리논리학에서 빠뜨릴 수 없는 핵심적인 정리들이다. 그런데 우리는 이 세 정리들과 관련하여 몇가지 흥미로운 점들을 발견할 수 있다. 첫째, 이 세 정리 모두 거짓말장이 역설과 같은 의미론적 역설의 응용 결과로서 얻어졌다는 점이다. 둘째, 논리학에 관한 메타 정리인 처치의 정리가 산술에 관한 메타 정리인 타르스키 정리나 괴델 정리와 마찬가지로 산술체계에 대한 연구를 통해 얻어졌다는 점이다. 그리고 셋째로, 산술체계의 결정불가능성은 곧 바로 산술체계의 불완전성을 함축하나, 논리학의 결정불가능성은 논리학의 불완전성을 함축하지 않는다는 점이다. 주지하는 바와 같이, 1 차 양화 논리학의 결정불가능성 정리가 1936 년 알론조 처치에 의해 증명되기 이전에, 1 차 양화 논리학의 완전성은 1930 년 쿠르트 괴델에 의해 이미 증명되었으며, 1947 년 레온 헨킨에 의해 다른 방식으로 재증명되었다.

이 논문의 목적은 처치, 괴델, 타르스키 정리들의 엄밀한 증명과, 이 증명에 대한 직관적인 이해를 돕는 설명을 위에서 열거한 흥미로운 점들의 해명을 중심으로 제시하는 데 있다.

Ⅱ. 의미론적 역설과 괴델 문장

(a) 일상 언어에서의 타르스키 문장과 괴델 문장

앞서 지적한대로 위의 세 정리들은 의미론적 역설을 일으키는 자기 지시적인 문장의 응용 결과로서 얻어진 것들이다. 우리는 자기 지시적인 문장이 어떻게 위의 세 정리들을 성립가능케 하여 주는지에 대해서 알아보기 전에 우리가 필요로 하는 자기 지시적인 문장, 즉 괴델 문장이 과연 존재

할 수 있는지, 존재할 수 있다면, 어떠한 형태를 띠고 있는지에 대해서 먼저 고찰하여 보자. 모든 일반적인 자기 지시적 문장을 우리는 '타르스키 문장이라 부를 수 있으며, 타르스키 문장 중 한 특수한 자기 지시적 문장, 구체적으로 말해, 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식에 대한 자기 지시적 문장을 괴델 문장이라 부른다. 이해를 쉽게 하기 위해 의미론적 역설을 설명할 때, 가장 흔히 드는 예를 통해 타르스키 문장과, 괴델 문장을 설명하여 보자.

(A) X는 거짓이다.

(B) 이 문장은 거짓이다.

문장 B는 'X는 거짓이다'라는 식 A에 대한 자기 지시적 즉 타르스키 문장이다. 여기서 우리의 과제는 하나의 자유변수만을 포함한 A와 같은 형태의 임의의 식으로부터 B와 같은 자기 지시적 타르스키 문장을 구해내는 일반적인 방식을 찾아내는 것이다. 물론 B와 같은 자기 지시적 문장 속에 '이 문장'과 같은 문맥 의존적인 어귀를 사용하지 말아야 한다는 조건 하에서 말이다. 'A'가 'X는 거짓이다'라는 식을 나타내는 이름이므로, 아래와 같이 변수 'X' 대신 'A'를 대입하면 B와 같은 자기 지시적 문장이 만들어질 것이라고 우리는 쉽게 생각할 수 있다.

(C) A는 거짓이다.

과연 C와 우리가 얻고자 하는 B는 동치인가? 그렇지 않다. 왜냐하면 문장 B 속에 있는 어귀 '이 문장'이 지시하는 것은 식 A가 아니라 바로 문장 B 자신이기 때문이다. 문장 B는 바로 자신인 B문장이 거짓임을 주장하는 자기 지시적인 타르스키 문장임에 반해, 문장 C는 C 자신이 아닌 식 A의 허위성을 주장하는 타자 지시적인 비타르스키 문장이다. 그러면 '이 문장'과 같이 문맥 의존적인 대명사를 사용함이 없이 어떻게 식 A로부터 B와 같은 자기지시적 문장을 만들어 낼 수 있을까? 타르스키 문장을 구해내는 이 과정이 바로 위의 세 정리들을 증명하기 위한 가장 핵심적인 부분이다.

우리는 문장 C가 왜 자기 지시적인 문장이 될 수 없었는지를 한번 살펴보자. 그 이유는 문장 C가 식 A 속의 변수 'X' 대신 'A'를 대입하여 얻어진 문장, 즉 문장 C 자신의 허위성을 주장하지 않고 단순히 식 A의 허위성만을 주장하고 있기 때문이다. 따라서 우리는 C를 아래와 같이 고쳐 볼 수 있을 것이다.

(D) A 속의 변수 대신 'A'를 대입한 문장은 거짓이다.

그러나 문장 D 역시 문장 C가 거짓임을 주장하는 문장일·뿐, 문장 D 자신이 거짓임을 주장하고 있지 않다. 우리는 이러한 약점을 보완하기 위해, 즉 문장 D 자신의 허위성을 주장하는 문장을 만들기 위해 아래와 같이 다

시 고쳐써보기를 시도해 볼 수 있을 것이다.

(E) A 속의 변수대신 "A 속의 변수 대신 'A'를 대입한 문장"을 대입한 문장은 거짓이다.

그러나 문장 E 역시 문장 D가 거짓임을 주장할 뿐, 문장 E 자신이 거짓임을 주장하고 있지 않다. 우리는 이제 이러한 방식으로 자기 지시적인 문장을 만들려 하는 것은 무한 역행으로만 빠져들 뿐 어떠한 해결책도 마련해주지 못함을 알 수 있다. 따라서 우리는 식 A로부터 직접 B와 같은 자기 지시적인 문장을 만들 수 없고, 식 A의 변형 형태인 어떤 중간 매개물을 거쳐 B와 같은 자기 지시적인 문장을 만들어야만 함을 알 수 있다.

우리는 아래와 같은 A의 변형 형태식을 제시할 수 있을 것이다.

(F) X 속의 변수 대신 'X'를 대입한 문장은 거짓이다.

이 식을 '타르스키 문장의 아버지 식'이라고 부르자. 그러면 타르스키 문장은 아래와 같이 F 속의 변수 대신 자신의 이름 'F'를 대입한 문장이 된다.

(G) F 속의 변수 대신 'F'를 대입한 문장은 거짓이다.

이제 문장 G가 문장 B와 같이 자기 지시적인 문장인지 살펴보자.

(B) 이 문장은 거짓이다.

문장 B 속의 '이 문장'이란 어귀에 대응하는 문장 G의 어귀는 "F 속의 변수 대신 'F'를 대입한 문장"임을 쉽게 알 수 있다. 또 B에서 '이 문장'은 문장 B 자신을 지시한다. 따라서 B와 마찬가지로 G문장이 자기 지시적 문장이 되기 위해서는 G 문장 속의 어귀 "F 속의 변수 대신 'F'를 대입한 문장"이 문장 G 자신을 지시하여야만 한다. 우리는 문장 G가 이 어귀의 기술내용을 그대로 만족함을 알 수 있다. 왜냐하면 문장 G가 바로 문장 F 속의 변수 대신 이름 'F'를 대입한 문장이기 때문이다. 따라서 문장 G는 식 A에 대해서 우리가 얻고자 했던 자기 지시적 타르스키문장임을 알 수 있다.

이제 우리는 하나의 자유 변수만을 포함하는 A와 같은 형태의 임의의 식으로부터 이 식에 대한 자기 지시적 타르스키 문장을 얻는 과정이 두 단계로 구성됨을 알 수 있다 : 첫째로, 식 A의 변형 식인 F와 같은 타르스키 문장의 아버지 식을 구하고, 둘째로 이 타르스키 문장의 아버지 식 속의 변수에 바로 이 타르스키 문장의 아버지 식의 이름을 대입하여 타르스키 문장을 구한다. 위의 둘째 과정과 같이 어떤 식 속의 변수에 이 식의 이름을 대입하는 것을 대각화(diagonalization)라 하고 원래 식을 대각화에 의해 얻어진 문장의 아버지 식, 역으로, 대각화에 의해 얻어진 문장을 원래 식의 아들 문장이라 부른다.

원래 식을 '$K(x)$'로, 원래 식의 이름을 '⌜K⌝'로 표기할 때 대각화에 의해 얻어진 문장은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$K(\ulcorner K \urcorner)$ 혹은 $(\exists x)(x = \ulcorner K \urcorner \ \& \ K(x))$

이 때 원래 식 $K(x)$가 대각화에 의해 얻어진 문장 $K(\ulcorner K \urcorner)$의 아버지 식이고, 대각화에 의해 얻어진 문장 $K(\ulcorner K \urcorner)$가 원래 식 $K(x)$의 아들 문장이다. 앞서나온 식 A와 문장 C를 예로 들 경우, 식 A로부터 문장 C를 산출하는 것을 대각화라 하고, 식 A를 문장 C의 아버지 식, 문장 C를 식 A의 아들 문장이라 부른다. 결국 대각화란 비유적으로 표현해 한 변수만을 자신 속에 포함한 아버지 식이 그 변수 대신 자신의 이름을 대입하여 자신의 적자인 아들 문장을 만들어 내는 것을 말한다.

이 대각화 개념은 타르스키 문장의 아버지 식 F로부터 그 아들인 타르스키 문장 G를 구하는 과정(즉 둘째 과정) 뿐만 아니라, 원래 식 A로부터 그 변형식인 타르스키 문장의 아버지 식 F를 구하는 과정(즉 첫째 과정)에서도 긴요하게 사용되는 매우 중요한 개념이다. A로부터 F를 구하는 첫째 과정에서 대각화 개념이 중요하다는 사실은 F를 아래와 같이 다시 쓸 수 있다는 데서도 분명히 드러난다.

(F_1) X의 대각화에 의해 얻어진 문장은 거짓이다.

혹은

(F_2) X의 아들 문장은 거짓이다.

F를 위와 같이 바꿔쓸 수 있는 이유는 "식 X 속의 변수 대신 'X'를 대입한 문장"이란 다름아닌 "식 X의 대각화에 의해 얻어진 문장"즉 "식 X의 아들 문장"이기 때문이다. 결국 식 A에 대한 타르스키 문장 G는원래 식 A의 대각화에 의해 곧바로 얻어지는 것이 아니라, 원래 식 A의 변수 'X' 대신 'X의 대각화에 의해 얻어진 문장'을 대입해서 변형식 F를 구한 후, 이 변형식 F의 대각화를 통해 우회적으로 얻어지는 것이다. 구체적으로 A, F, G를 대각화란 용어를 사용하여 다시 한번 써보면

(A) X는 거짓이다.

(F_1) X의 대각화에 의해 얻어진 문장은 거짓이다.

(G_1) F_1의 대각화에 의해 얻어진 문장은 거짓이다.

또 아들이란 용어를 사용하여 F와 G를 다시 표현하면, 대각화에 의해 얻어진 문장이 바로 아들 문장이므로

(F_2) X의 아들 문장은 거짓이다.

(G_2) F_2의 아들 문장은 거짓이다.

결국 G는 우리가 '이 문장'등과 같은 문맥 의존적 어귀를 사용함이 없이 얻고자 했던 식 A에 대한 자기 지시적 타르스키 문장임을 알 수 있다.

괴델 문장은 타르스키 문장들 중의 어느 한 특수한 문장을 말한다. 구체적으로 말해, 타르스키 문장이 하나의 자유 변수만을 포함한 임의의 식으로부터 얻어진 모든 자기 지시적 문장을 통틀어 일컫는 말임에 반해, 괴델 문장은 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식으로부터 얻어진 특정한 자기 지시적 문장만을 일컫는 말이다. 예를 들자면,

(A′) X는 정리가 아니다.

(F′) X 속의 변수 대신 'X'를 대입한 문장은 정리가 아니다.

(G′) F′ 속의 변수 대신 'F′'를 대입한 문장은 정리가 아니다.

식 A′가 일상 언어의 어떤 이론 체계에서 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식이라 할 경우, 바로 G′가 괴델 문장이 되며, F′는 괴델 문장의 아버지 식이 되는 것이다. G가 스스로가 참이면 거짓이 되고, 거짓이면 참이 된다는 의미론적 역설을 야기하는 자기 지시적 문장임에 반해, G′는 스스로가 참이면 정리가 아니며, 스스로가 거짓이면 정리가 된다는 자신의 증명불가능성을 주장하는 자기 지시적 문장이다.

이로써 우리는 타르스키, 처치, 괴델 정리들의 핵심적인 부분인 자기 지시적 문장을 구하는 과정에 대한 골격은 모두 이해할 수 있게 된 셈이다. 우리의 첫번째 작업을 마무리짓기 위해 해야할 남은 작업은 일상 언어가 아닌 산술 체계의 언어로 표현된 타르스키 문장과 괴델 문장을 실제로 구해보는 일이다. 그러기 위해서 우리는 우선 산술 체계가 무엇인가? 그리고 타르스키문장의 아버지 식이 과연 산술체계의 언어로 표시 가능하며, 표시 가능하다면 어떤 형태를 띠고 있는가? 또 산술 체계의 각 문장마다 그 이름을 산술 체계의 언어로 붙일 수 있는가 하는 문제를 먼저 고찰하여야 한다. 자유변수를 하나만 포함한 모든 산술체계의 식에 대한 타르스키 문장의 아버지 식이 산술 체계의 언어로 항상 표시 가능하며, 산술 체계에 속한 각 문장마다 산술 체계의 언어로 그 이름을 모두 붙일 수 있다면, 산술 체계에 속하는 자유변수를 하나만 포함한 모든 식에 대한 타르스키 문장을 산술 체계의 언어로 표시할 수 있음은 당연하다. 왜냐하면 타르스키 문장은 타르스키 문장의 아버지 식에 그 아버지 식의 이름을 대입하여 얻어진 문장이기 때문이다. 따라서 첫째, 산술 체계가 무엇인가 하는 문제; 둘째, 산술 체계에 속하는 식의 종류를 결정할 수 있는 기준을 알려주는 표시가능성 문제; 셋째, 산술 체계의 문장에 고유 이름을 부여하는 작업인 괴델수 부여 작업을 차례로 알아보자.

(b) 산술 체계

산술 체계는 산술의 언어로 표현된 한 형식 이론이다. 산술의 언어는 양화 논리학의 논리적 기호들 즉 변수와 아래 11개의 기호들 − & ∨ →

$\leftrightarrow$ $\exists$ $\forall$ = ( ) , 와 더불어 다음과 같은 4개의 비논리적 기호들을 갖는다 : 이름 0, 1항 함수 기호 $'$, 2개의 2항 함수 기호 +와 $\cdot$. 따라서 이 산술의 언어에는 문장기호와 술어기호가 없다. 형식 이론이란 어떤 공리들로부터 논리학의 일반적인 규칙들을 통해 도출되는 정리들의 집합을 말한다. 공리들은 결정가능한 문장들의 집합을 말하고, 논리학의 일반적인 규칙들은 건전하고 완전하기 때문에, '형식 이론'이란 '공리화 가능한 이론'과 동의어로 간주될 수 있다. 산술 체계 중 가장 대표적인 이론인 로빈슨 산술 체계 Q에 대해 알아보자.

로빈슨 산술 체계 Q는 산술의 언어로 표기된 다음 7개의 공리들로부터 논리학의 일반적인 규칙들을 통해 도출되는 결과들의 집합이다. 물론 Q의 정리들도 모두 산술의 언어로 표기되어야 한다.

Q_1 $\forall_x\forall_y(x' = y' \rightarrow x = y)$,

Q_2 $\forall_x(0 \neq x')$,

Q_3 $\forall_x(x \neq 0 \rightarrow \exists y\,(x = y'))$,

Q_4 $\forall_x(x + 0 = x)$,

Q_5 $\forall_x\forall_y(x + y' = (x + y)')$,

Q_6 $\forall_x(x \cdot 0 = 0)$,

Q_7 $\forall_x\forall_y(x \cdot y' = (x \cdot y) + x)$

Q는 일관적인 이론이다. 왜냐하면 Q의 공리들이 산술 언어 L에 대한 아래와 같은 표준적인 해석 N에서 모두 참이므로 Q의 모든 정리들도 역시 참이기 때문이다 : 표준적 해석 N의 논의 영역은 모든 자연수들의 집합 { 0, 1, 2, …… } 이며, N은 0에 가장 작은 자연수 영(0)을 지시대상으로 부여하고, $'$에는 각 자연수 n에 대해 $n+1$을 그 값으로 갖게하는 계승자(successor)함수, +에는 각 자연수의 쌍 m, n에 대해 $m+n$을 그 값으로 갖게하는 합(addition)의 함수, $\cdot$에는 각 자연수의 쌍 m, n에 대해 $m \cdot n$을 그 값으로 갖게하는 곱(multiplication)의 함수를 각각 부여한다.

Q의 모든 정리들이 표준적인 해석 N하에서 참이기는 하나, 그 역은 성립하지 않는다. 즉 N에서 참인 문장이라고 해서 모두 Q의 정리가 아니다. (예 : $\forall_x\forall_y(x + y = y + x)$) 다시 말해, Q는 산술 언어 L에 대한 표준적인 해석 N에서 참인 모든 문장을 자신의 정리로 갖지 못하고 오로지 그 일부만을 자신의 정리로 갖는다. 따라서 우리는 Q의 7개의 공리에다가 새로운 공리를 첨가함으로써 산술 언어 L에 대한 표준적인 해석 N에서 참인 모든 문장을 자신의 정리로 갖는 산술 체계를 꾸며보도록 시도할 수 있을 것이다. 괴델 정리는 바로 이와 같은 시도를 통해 얻고자 하는 완전한

산술 체계가 가능하지 않다는 것을 밝힌 정리이다. 즉 괴델 정리는 공리화된 일관적이고 완전한 산술 체계가 존재하지 않는다는 것을 밝힌 정리이다. 그리고 한 이론 S의 모든 정리들이 다른 이론 T의 정리일 경우, 즉 S가 T의 부분집합일 경우, 이론 T를 이론 S의 연장이라고 부르자. 그러면 산술은 산술 체계 Q를 일관적으로 완전하게 연장한 이론이 된다. 다시 말해, 산술이란, 공리화가 가능하다면, 표준적 해석 N에서 참인 문장들 모두를 그리고 오로지 그들만을 자신의 정리로 갖는 이론이다. 그러므로 괴델 정리는 "산술이란 공리화 가능하지 않다"라는 식으로 달리 표현될 수 있다.

(c) 표시 가능성과 정의 가능성

산술의 언어 L은 논리적 기호들(변수와 11개의 기호들)을 빼면 고유한 기호로서는 4개의 **비논리적 기호** (하나의 이름과 3개의 함수 기호) 밖에 가지고 있지 않은 매우 빈약한 언어이다. 따라서 문장기호나 술어기호를 포함하고 있지 않은 이 산술의 언어로 타르스키 문장의 아버지 식을 표시할 수 있는가 하는 문제는 타르스키 문장과 괴델 문장을 구하려는 우리 과제의 제1관문이 아닐 수 없다. 산술 체계의 임의의 식 "x는 C이다"에 대한 타르스키 문장의 아버지 식은 "x의 대각화에 의해 얻어진 문장은 C이다"이므로, 타르스키 문장의 아버지 식에 대한 표시가능성 여부는 "x"로부터 "x의 대각화에 의해 얻어진 문장"을 산출해 내는 대각화 함수 관계를 산술 체계의 언어로 표시할 수 있는지의 여부에 따라 결정된다.

표시 가능성과 정의 가능성을 보다 엄밀히 정의하기 위해 우리는 우선 산술 체계의 언어 속에서의 수와 숫자를 구별하여야 한다. 산술 체계 속에서의 수 2는 일반적인 표기법에 따른 아라비아 숫자 '2'에 의해 표기되지 않고 0의 오른쪽 어깨에 ′를 두개 덧붙인 숫자 '0′′'에 의해 표기된다. 편의상 '0′′'를 '$\overline{2}$'와 같이 일반아라비아숫자 위에 막대를 그어 표기하기로 하자.

n항 함수 f는 다음과 같은 경우 산술 이론 T속에 표시 가능하다고 말한다: 어떠한 자연수 p_1, p_2, ……, p_n, j에 대해서도 만일 $f(p_1, p_2 \cdots p_n) = j$이면, $\vdash_T \forall_{n+1}\,(A(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \cdots\cdots, \bar{p}_n, x_{n+1}) \leftrightarrow x_{n+1} = \bar{j}\,)$를 만족하는 식 $A(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, x_{n+1})$이 존재한다. 이 경우 식 $A(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, x_{n+1})$가 산술 이론 T 속에서 함수 f를 표시한다고 말한다. 예를 들어, 산술 이론 T 속에서 함수 $y = 2x$를 표시하는 식 $A(x, y)$

는 " $y = x + x$ "가 된다. 왜냐하면 x, y, $=$, $+$ 모두 산술의 언어 속에 속하는 기호들이고, 어떠한 자연수 p , j에 대해서도 만일 2p $= j$이면, $\vdash_T \forall_y\,(y = \bar{p} + \bar{p} \leftrightarrow y = \bar{j})$ 이기 때문이다.

우리는 여기서 가장 대표적인 산술 이론인 로빈슨 산술 체계 Q속에서의 표시 가능성에 관해서만 알아 보기만 하면 된다. 왜냐하면 Q는 우리가 필요로 하는 결과 즉 모든 회귀적 함수들은 Q속에 표시 가능하다는 결과를 보증하기에 충분한 이론이며, 또 만일 함수 f가 Q속에 표시 가능하다면, 그것의 일관적인 연장인 어떠한 산술 체계 T 속에서도 함수 f는 역시 표시 가능하기 때문이다. 실제로 Q속에서 f를 표시했던 식과 동일한 식이 T속에서도 f를 표시한다.

모든 회귀적 함수들이 Q속에 표시 가능하다는 것에 대한 증명 과정은 우리의 앞으로의 논의에 어떠한 직접적인 영향도 미치지 않으며, 이 증명과정 자체만으로도 하나의 별도의 논문을 요구하는 내용이므로 여기서는 생략하기로 하고 우리는 단지 그 결과가 증명되었다는 것을 가정하고 논의를 전개하기로 하자.

표시 가능성이 함수에 관한 것이라면, 정의 가능성은 집합과 다항관계에 관한 것이다. 자연수들의 집합 θ는 다음과 같은 경우 산술 이론 T 속에 정의 가능하다고 말한다 : 어떠한 자연수 k에 대해서도, 만일 $k \in \theta$이면, $\vdash_T B(\bar{k})$이고, 만일 $k \notin \theta$이면, $\vdash_T -B(\bar{k})$를 만족하는 식 B (x)가 존재한다. 이 경우 식 B(x)가 산술 이론 T속에서 집합 θ를 정의한다고 말한다. 예를 들어, 산술 이론 T속에서 짝수인 자연수들의 집합 θ를 정의하는 식 B (x)는 " $(\exists y)(x = y + y)$ "가 된다. 왜냐하면 $\exists$, x, y, $=$, $+$가 모두 산술의 언어 속에 속하는 기호들이고, 어떠한 자연수 k에 대해서도, 만일 k가 짝수이면, $\vdash_T (\exists y)(\bar{k} = y + y)$이고, 만일 k가 홀수이면, $\vdash_T -(\exists y)(\bar{k} = y + y)$ 이기 때문이다. 자연수들의 2항 관계 및 그 이상의 다항 관계들도 유사한 방식으로 정의될 수 있다. 그리고 표시의 경우와 마찬가지로 어떤 이론 속에서 한 집합을 정의하는 식과 동일한 식이 그 이론의 어떠한 연장된 이론 속에서도 역시 그 집합을 정의한다.

표시 가능성과 정의 가능성의 관계를 간략히 얘기하자면, 표시 가능성이 정의 가능성 보다 가능성의 확률이 낮다. 다시 말해, 표시 가능한 함수에 의해 특징지워질 수 있는 집합이나 관계는 모두 정의 가능하나, 정의 가능한 집합이나 관계의 특징함수는 일부 표시 가능하지 않는 것이 있다.

(d) 괴델수 부여

괴델수란 산술체계의 표현들에 붙여진 고유한 자연수를 말하며, 괴델수 부

여란 각 표현에 어떤 특정한 자연수를 부여하는 작업을 말한다. 산술체계의 표현들에 붙여진 괴델수를 산술체계 내의 기호로 표기할 때, 다시 말해 0 과 ′만을 사용하여 표기할 때, 그 괴델수는 그 산술체계 표현의 이름이 된다. 우리는 앞서 편의상 0″와 같은 산술체계 내의 기호로 표기된 숫자 대신 $\bar{2}$와 같이 일반 아라비아 숫자 위에 막대기를 그어 사용하기로 약속하였다. 괴델수 부여 작업은 다음의 세 조건을 만족하여야 한다 : (1) 서로 다른 표현에 서로 다른 괴델수가 부여되어야 한다 ; (2) 각 표현의 괴델수는 기계적으로 산출될 수 있어야 한다 ; (3) 어떤 수가 산술체계 표현들의 집합에 속한 표현의 괴델수인지의 여부를 기계적으로 결정할 수 있어야 하며, 만일 산술체계 표현들의 집합에 속한 표현의 괴델수일 경우, 그 괴델수가 구체적으로 어떤 표현의 괴델수인지를 기계적으로 알아낼 수 있어야 한다. 괴델수부여작업은 어떤 수에 관한 특정한 문장을 그 수를 괴델수로 즉 이름으로 갖는 어떤 특정한 표현에 관한 문장이 될 수 있도록 하여주며, 따라서 자기지시적 문장의 가능성을 열어 준다.

그러면 이제 위의 세 조건들을 만족하는 괴델수 부여의 한 구체적인 예를 들어보자. 1차 양화 논리학의 표현에서 등장할 수 있는 기호들의 총체는 다음과 같다.

도표 1.

( )	&	∃	x_0	f_0^0	f_0^1	f_0^2	…	A_0^0	A_0^1	A_0^2	…
,	v	∀	x_1	f_1^0	f_1^1	f_1^2	…	A_1^0	A_1^1	A_1^2	…
	→		x_2	f_2^0	f_2^1	f_2^2	…	A_2^0	A_2^1	A_2^2	…
	↔		.	.	.	.		.	.	.	
	—		.	.	.	.		.	.	.	
			.	.	.	.		.	.	.	

우리는 위의 각 기호들에 다음과 같은 괴델수를 부여할 수 있을 것이다.

도표 2.

1 2	3	4	5	6	68	688	…	7	78	788	…
29	39	49	59	69	689	6889	…	79	789	7889	…
	399		599	699	6899	68899	…	799	7899	78899	…
	3999		.	.	.	.		.	.	.	
	39999		.	.	.	.		.	.	.	
			.	.	.	.		.	.	.	

위의 도표에는 산술의 언어에서 사용되는 기호들이 나와있지 않음을 알 수 있다. 따라서 우리는 도표 속의 기호들 중의 일부를 우리가 필요로 하는 기

호와 동일시할 필요가 있다. 이제 다음과 같이 약속하기로 하자.

$x_0 = x$, $x_1 = y$, $f_0^0 = 0$, $f_0^1 = '$, $f_0^2 = +$, $f_1^2 = \cdot$, $A_0^2 = =$.

'$gn(\cdots)$'를 '…의 괴델수'의 약식 표현이라 하면,

$gn(x) = 5$, $gn(y) = 59$, $gn(0) = 6$,

$gn(') = 68$, $gn(+) = 688$,

$gn(\cdot) = 6889$, 그리고 $gn(=) = 788$.

그리고 $\exists x(x=$의 괴델수 즉 $gn(\exists x(x=)$은 $gn(\exists) = 4$, $gn(x) = 5$, $gn(() = 1$, 그리고 $gn(=) = 788$이므로 4515788이 된다. 또 복합 표현 AB의 괴델수는 A의 괴델수가 i, B의 괴델수가 j라 할 경우, ij가 된다. 이제 우리는 산술체계에 있어서의 타르스키 문장과 괴델문장을 구하기 위한 준비는 모두 끝마친 셈이다. 이제 산술체계에 있어서의 타르스키 문장과 괴델 문장을 구해보자.

(e) 산술 언어에서의 타르스키 문장과 괴델 문장

우리는 앞서 하나의 자유변수만을 포함하는 임의의 식으로부터 이 식에 대한 자기 지시적 타르스키 문장 G를 얻는 과정이 아래와 같은 두 단계로 되었음을 밝혔었다 : 첫째, 원래 식에 대한 변형식인 타르스키 문장의 아버지 식 F를 구하고 ; 둘째, 이 타르스키 문장의 아버지 식 속의 변수에 바로 이 타르스키 문장의 아버지 식의 이름을 대입하여 즉 대각화를 통하여 타르스키문장을 구한다. 그리고 우리가 우선적으로 구해야할 타르스키 문장의 아버지식 F는 원래 식의 변수 'x'대신에 'x의 대각화에 의해 얻어진 문장'을 대입해서 구해짐을 밝혔었다. 따라서 우리의 일차적 과제는 'x'로부터 'x의 대각화에 의해 얻어진 문장'을 산출하는 함수가 존재하며, 이 함수가 산술체계 속에 표시 가능함을 밝히는 일이다. 그런데 회귀적 함수는 모두 로빈슨 산술 체계 Q속에 표시 가능하며, 또한 Q의 연장인 어떠한 산술 체계 속에서도 표시 가능하다. 그러므로 타르스키 문장의 아버지 식 F가 산술 체계 속에 표시 가능함을 알기 위해서는 'x'로부터 'x의 대각화에 의해서 얻어진 문장' 즉 'diag(x)'를 산출하는 대각화 함수 diag가 회귀적 함수임을 밝히면 된다.

앞서 원래 식을 'K(x)' 원래 식의 이름을 '⌈K⌋'로 표기할 때 대각화에 의해 얻어진 문장은 'K(⌈K⌋)' 혹은 '($\exists x$)(x = ⌈K⌋ & K(x))' 로 표현될 수 있음을 밝혔었다. 따라서 원래 식의 변수를 생략하고, 또 양화사를 둘러싼 괄호를 생략하여 대각화 문장을 더욱 간략히 표기하면, $\exists x$(x = ⌈K⌋ & K)가 된다. 그리고 산술 체계에 속한 원래 식 'K'의 이름 '⌈K⌋'는, 원래 식 'K'의 괴델수가 n일 경우, 산술 체계 내의 표기법으로 표현

된 숫자 $\bar{n}$가 된다.

이제 'x'로부터 'x의 대각화에 의해 얻어진 문장' 즉 'diag (x)'을 산출하는 대각화 함수 diag가 회귀적 함수임을 증명하여 보자.

《보조정리 1》

만일 n이 원래 식 K의 괴델수이면, diag(n)이 식 K의 대각화에 의해 얻어진 문장의 괴델수가 되는 회귀적 함수 diag이 존재한다.

《증 명》

길이 (length)함수 lh를 다음과 같이 정의하자.

$lh(n)$ = 가장 작은 자연수 m ($0 < m$ & $n < 10^m$). 모든 자연수 n에 대해, n이 10^m보다 작다는 조건을 만족하는 어떤 양의 정수 m이 항상 존재하며, 지수 (exponentiation)와 보다 작음 (less than)이 회귀적이므로, lh는 회귀적 함수이다. $lh(n)$은 실제로 10진법 아라비아 숫자 n의 자리수를 가리키는 즉 숫자 n의 길이를 가리키는 함수이다. 예를 들어, 4자리 숫자 1879에 대한 $lh(1879) = 4$이며, 두자리 숫자 29에 대한 $lh = (29) = 2$, 그리고 $lh(0) = lh(9) = 1$이다.

$*$를 다음과 같이 정의하자.

$m * n = m \cdot 10^{lh(n)} + n$. $*$는 회귀적이다. 만일 $m \neq 0$이라면 $m*n$은 아라비아 숫자 n 바로 앞에 아라비아 숫자 m을 씀으로써 형성되는 숫자에 의해 지시되는 수를 말한다. 따라서 $2*3 = 23$이다.

함수 num을 다음과 같이 정의하자 : num (0) = 6; num ($n+1$) = num (n)*68. num은 회귀적 함수이다. $gn(0) = 6$이고 $gn(')= 68$ 이므로, num(n)은 실제로 산술체계 내의 숫자 $\bar{n}$의 괴델수를 말한다. 예를 들어, num (2)는 아라비아숫자 "2"에 대응하는 산술체계 내의 숫자 '$\bar{2}$' 즉 '0″'의 괴델수 66868을 가리킨다.

앞서 gn($\exists x$ ($x =$) = 4515788, gn(&) = 3, gn( )) = 2임을 밝혔었다. 그리고 '⌈K⌋'는 원래 식 'K'의 괴델수 n에 대응하는 산술체계내의 숫자 '$\bar{n}$'이므로 gn(⌈K⌋) = num(n)이다. 따라서, 대각화에 의해 얻어진 문장 '$\exists x$ (x * ⌈K⌋ &K)' 즉 diag (n)은 4515788 * (num(n) * (3*(n*2))) 이 되며, 이 대각화 문장을 산출하는 대각화 함수 diag는 회귀적 함수임을 알 수 있다.

이로써 우리는 대각화 함수 diag가 Q와 Q의 연장 이론 속에서 표시가 능함을 보였다. 이제 A(x, y)가 산술체계 속에서 대각화 함수 diag을 표시한다고 가정하자. 그러면 A(x,y)는 y = diag (x) 즉 y = 4515788*(num (x) * (3 * (x *2)))를 산술체계 내의 기호들만을 사용하여 표시한 식이 된다.

왜냐하면, 어떠한 자연수 p j에 대해서도 만일 $j=\mathrm{diag}(p)$이면, $\vdash_T \forall_y (y=\mathrm{diag}(\bar{p}) \leftrightarrow y=\bar{j})$이기 때문이다. 그리고 자유 변수를 하나만 포함한 산술체계의 임의의 식 $B(x)$에 대한 타르스키 문장의 아버지 식 F는 $\exists y(A(x, y) \ \& \ B(y))$가 된다. 아버지식 F를 일상언어로 번역하면, "x의 대각화에 의해 얻어진 문장 y는 B이다"가 된다. 만일 $\mathrm{diag}(x)$가 산술체계 내의 기호들만을 사용하여 표시한 식이라면, $A(x, y)$는 $y=\mathrm{diag}(x)$이므로 F는 $B(\mathrm{diag}(x))$로 달리 표현될 수도 있다. 실제로 $\exists y(y=\mathrm{diag}(x) \ \& \ B(y))$와 $B(\mathrm{diag}(x))$는 논리적 동치이다.

타르스키 문장의 아버지 식이 구해졌으므로, 타르스키 문장 G는 대각화를 통하여 쉽게 구할 수 있다. $\ulcorner F \urcorner=\bar{n}$이라 할 때, 타르스키 문장 G는 $\exists x(x=\bar{n} \& \exists y(A(x, y) \& B(y)))$가 된다. 따라서 우리의 일차적 목표는 일단 달성된 셈이다. 이제 이 일차적 목표의 완벽한 완수를 위해 남은 일은 과연 우리가 구한 타르스키 문장 G가 진정 우리가 원하는 대로 자기 지시적 문장인가를 확인해 보는 일이다. G가 자기 지시적 문장일 경우, G는 다름아닌 $\exists x(x=\ulcorner G \urcorner \& B(x))$ 또는 $B(\ulcorner G \urcorner)$이어야만 한다. 따라서 G가 자기 지시적이기 위해서는 $\vdash G \leftrightarrow B(\ulcorner G \urcorner)$이어야만 한다.

《보조 정리 2》(대각화 보조정리)

T를 대각화 함수 diag가 표시가능한 산술체계 Q의 일관적인 연장 이론이라고 하자. 그러면 자유 변수를 하나만 포함한 산술체계 T의 어떠한 임의의 식 $B(x)$에 대해서도, $\vdash_T G \leftrightarrow B(\ulcorner G \urcorner)$를 만족하는 문장 G가 항상 존재한다.

《증 명》

$A(x, y)$가 이론 T에서 대각화 함수 diag을 표시한다고 하자. 그러면 어떠한 n, k에 대해서도 만일 $\mathrm{diag}(n)=k$이면, $\vdash_T \forall_y(A(\bar{n}, y) \leftrightarrow y=\bar{k})$이다.

F를 $\exists y(A(x, y) \ \& \ B(y))$라 하자. 그러면 F는 하나의 자유 변수 x만을 포함한 산술체계 T의 식이 된다. 그리고 n을 식 F의 괴델수라고 하자 (즉 $\bar{n}=\ulcorner F \urcorner$).

G를 $\exists x(x=\bar{n} \& \exists y(A(x, y) \& B(y)))$라고 하자. $\bar{n}=\ulcorner F \urcorner$이므로 G는 F의 대각화에 의해 얻어진 문장이고 또 산술체계 T에 속한 문장이다. G는 $\exists y(A(\bar{n}, y) \& B(y))$와 논리적 동치이므로, 우리는

$\vdash_T G \leftrightarrow \exists y(A(\bar{n}, y) \& B(y))$ …… ①를 얻을 수 있다.

k를 G의 괴델수라고 하자. 그러면 $\mathrm{diag}(n)=k$, 그리고 $\bar{k}=\ulcorner G \urcorner$가 된다. $A(x, y)$가 T속에서 대각화 함수 diag을 표시하고, $\mathrm{diag}(n)=k$이므로 $\vdash_T \forall_y(A(\bar{n}, y) \leftrightarrow y=\bar{k})$. 이것은 모든 y에 대해 $A(\bar{n}, y) \leftrightarrow y=\bar{k}$임을 말하므로 ①은 $\vdash_T G \leftrightarrow \exists y(y=\bar{k} \& B(y))$ …… ②를 논리적으로 함축한

다. 또 $\exists y(y=\bar{k}\,\&\,B(y))$는 $B(\bar{k})$와 논리적 동치이므로 ②는 다음을 논리적으로 함축한다. $\vdash_T G \leftrightarrow B(\bar{k})$, 즉 $\vdash_T G \leftrightarrow B(\ulcorner G \urcorner)$.

이로써 우리는 우리가 구한 타르스키 문장 G가 자기 지시적 문장임을 보였다. 이제 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식에 대한 자기 지시적 문장 즉 괴델 문장을 구해보자. 만일 우리가 구한 타르스키 문장 G 즉 $\exists x(x=\bar{n}\,\&\,\exists y(A(x,y)\,\&\,B(y)))$에서 $B(y)$가 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식이라면, 이것이 바로 괴델 문장이 될 것이다. 그러나 문제는 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식이 산술체계 내에서 가능하느냐는 것이다. 괴델이 증명하고자 한 것은 만일 산술체계의 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식이 산술체계 내에 존재한다면, 체계 내 자체 모순을 유발하기 때문에 그러한 식은 존재하지 않으며 따라서 괴델 문장도 존재하지 않는다는 것이다.

앞서 필자는 "(A′) X는 정리가 아니다"라는 식이 일상 언어의 어떤 이론 체계에서 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식이라 할 경우, 바로 "(G′) F′속의 변수 대신 'F′'를 대입한 문장은 정리가 아니다"라는 문장이 괴델 문장이 되며, 이 괴델 문장G′는 스스로가 참이면 그리고 오로지 이 경우에만 정리가 아니며, 스스로가 거짓이면 그리고 오로지 이 경우에만 정리가 된다는 자신의 증명 불가능성을 주장하는 자기 지시적 문장이라고 지적하였었다. 그러나 좀더 면밀히 고찰하면, 자신의 증명 불가능성을 주장하는 자기 지시적 문장일 뿐만 아니라, 더 나아가 A′가 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식이라는 가정을 받아 들일 경우 자체모순을 내포하고 있는 문장임을 알 수 있다. 귀류법을 이용하여 G′가 자체모순적임을 밝혀보자.

우선 G′가 우리가 고려하고 있는 어떤 이론 체계의 정리라고 가정하자. 그러면 스스로에 관해 진술한 이 문장 G′는 거짓이 된다. 그런데 이 체계의 공리는 모두 참이며, 또한 논리학의 모든 추론 규칙들은 어떠한 거짓 결론도 참의 전제로부터 끌어내지 않으므로, 이 체계의 정리들은 모두 참이어야만 한다. 따라서 G′는 정리가 아니다. 그러므로 G′는 정리가 아니다.
다음 G′가 이 체계의 정리가 아니라고 가정하자. 그러면 이 문장 G′는 A′를 만족한다. 그리고 A′가 이 체계의 정리가 아닌 것들의 집합을 정의하는 식이므로 "「G′」는 정리가 아니다"라는 문장은 이 체계 내에서 증명가능하며 따라서 이 체계의 정리가 된다. 왜냐하면, 한 이론 체계의 정리가 아닌 것들의 집합이 정의 가능하다는 것은 그 체계의 정리가 아닌 어떤 임의의 식이 주어졌을 때, 그 식이 정리가 아니라는 것을 증명할 수 있는 기계적인 방법이 있다는 것을 뜻하기 때문이다. 다시 말해 "그 식이 정리가 아니다" 라는 문장이 그 체계의 정리가 된다는 것을 뜻하기 때문이다. 그런데

"⌜G′⌝는 정리가 아니다"라는 문장은 다름 아닌 문장 G′ 자체이므로 G′는 이 체계의 정리가 된다. 그러므로 G′는 정리이다.

우리는 정리인것들의 집합을 정의하는 식이 가능하다는 것으로부터 G′가 정리이며 동시에 정리가 아니라는 모순적인 결과를 얻었으므로 정리인 것들의 집합이 정의 불가능하다는 결론을 내릴 수 있다. 이제 산술 체계의 정리들의 괴델수들의 집합이 산술 체계 내에서 정의불가능하다는 것을 증명하여 보자.

《보조정리 3》

만일 T가 Q의 일관적인 연장 이론이라면, T의 정리들의 괴델수들의 집합은 T속에서 정의가능하지 않다.

《증 명》

T를 Q의 연장 이론이라 하자. 그러면 대각화 함수 diag는 T속에 표시가능하다. 왜냐하면 diag는 회귀적 함수이고, 모든 회귀적 함수는 Q속에 표시가능하며, 따라서 Q의 어떠한 연장이론 속에서도 표시가능하기 때문이다.

이제 C(y)가 T의 정리들의 괴델수들의 집합 θ를 정의한다고 하자. 그러면 보조 정리 2 (대각화 보조정리)에 의해 다음을 만족하는 문장 G가 존재한다 : $\vdash_T G \leftrightarrow -C(\ulcorner G \urcorner)$. $k = gn(G)$라 하자. 그러면 $\bar{k} = \ulcorner G \urcorner$ 이므로 $\vdash_T G \leftrightarrow -C(\bar{k})$ …… ①

귀류법을 사용하기 위해, G가 T의 정리가 아니라고 가정하여 보자. 그러면 $k \notin \theta$이며, 따라서 C(y)가 θ를 정의하므로 $\vdash_T -C(\bar{k})$이다. ①에 의해, $\vdash_T G$이다. 그러므로 $\vdash_T G$이다. 또 이번에는 G가 T의 정리라고 가정하자. 그러면 C(y)가 θ를 정의하므로, $\vdash_T C(\bar{k})$이다. ①에 의해, $\vdash_T -G$이다. 그러므로 $\vdash_T -G$이다. 결국 T의 정리들의 괴델수들의 집합이 T속에서 정의가능하다고 가정할 경우, 이 체계는 $\vdash_T G$와 $\vdash_T -G$를 동시에 정리들로 허용하게 되어 모순적인 체계가 된다. 따라서 T의 정리들의 괴델수들의 집합은 T속에서 정의가능하지 않다.

이로써 우리는 산술 체계 T의 정리들의 괴델수들의 집합은 T속에서 정의 가능하지 않음을 증명하였다. 이 결과를 기반으로 표준적 해석 N에서 참인 문장들의 괴델수들의 집합은 산술 속에서 정의가능하지 않다는 타르스키의 정의불가능성 정리, 일차 양화 논리학 문장들의 타당성 여부를 가리는 기계적결정 방법이 없다는 처치의 결정불가능성 정리, 그리고 산술의 일관적이고 완전한 공리화는 불가능하다는 괴델의 불완전성 정리를 차례로 증명하여 보자

Ⅲ. 정의불가능성 결정불가능성 그리고 불완전성 정리들

(a) 타르스키의 정의불가능성 정리 증명

타르스키의 정의불가능성 정리는 표준적 해석 N에서 참인 문장들의 괴델수들의 집합은 산술 속에서 정의불가능하다는 것으로, 간략히 표현하자면, 산술적 진리는 산술적으로 정의가능하지 않다는 것이다. 이 타르스키 정리는 앞서 증명한 《보조정리 3》으로부터 직접적으로 추론된다. 왜냐하면 산술이란 산술체계 Q의 일관적이고 완전한 연장으로, 이러한 일관적이고 완전한 산술의공리화가 가능할경우, 표준적 해석 N에서 참인 문장들이란 다름아닌 산술의 정리들이기 때문이다. 다시 말해, 산술이란 표준적 해석 N에서 참인 문장들 모두를 그리고 오로지 그들만을 정리로 갖는 이론이기 때문이다.

《정리 1》(타르스키의 정의불가능성 정리)
표준적 해석 N에서 참인 문장들의 괴델수들의 집합은 산술 속에서 정의불가능하다.

《증 명》
산술은 이론 Q의 한 일관적인 연장이고, 산술의 정리들이 바로 N에서 참인 문장들이므로, 정리 1은 보조정리 3으로부터 도출된다.

(b) 산술의 결정불가능성 증명

만일 한 집합을 이루고 있는 표현들의 괴델수들의 집합이 회귀적 집합이면, 그 표현들의 집합은 결정가능하다고 불린다. 따라서 한 이론 T의 정리들의 괴델수들의 집합 θ가 회귀적이면 다시 말해, θ의 특징함수가 회귀적이면 그리고 오로지 이 경우에만 이론 T는 결정가능하다.

또 만일 어떤 이론이 결정가능하면, 어떤 주어진 문장이 그 이론의 정리인지의 여부를 결정할 수 있는 기계적인 방법이 존재한다. 왜냐하면, 어떤 문장이 정리인지의 여부를 결정하기 위해서는, 그것의 괴델수를 먼저 산출하고, 그 괴델수를 독립변수의 값으로 하여 회귀적인 특징함수의 값을 계산하기만 하면 되기 때문이다. 그 특징함수의 값이 1이면 그리고 오로지 이 경우에만 그 문장은 정리이다. 역으로, 만일 어떤 이론이 결정가능하지 않으면, 그러면 기계적으로 계산가능한 모든 함수는 회귀적 함수라는 처치의 정립에 의해, 어떤 주어진 문장이 그 이론의 정리인지의 여부를 결정하기 위한 기계적인 방법이 없다. 왜냐하면, 만일 그러한 기계적인 방법이 있다면, 정리들의 괴델수들의 집합의 특징함수도 역시 기계적으로 계산가능할 것이며, 따라서 처치 정립에 의해 회귀적 함수일 것이기 때문이다. 결국 처치

의 정립이 거짓이 아니라면, 어떤 이론이 결정가능하면, 그리고 오로지 이 경우에만, 어떤 주어진 문장이 그 이론의 정리인지의 여부를 결정할 수 있는 기계적인 방법이 존재한다.

산술이 결정불가능함을 보이기 위해서는, 산술은 Q의 한 일관적인 연장 이론이므로, Q의 어떠한 일관적인 연장도 결정가능하지 않음을 보이면 된다.

《정리 2》

Q의 어떠한 일관적인 연장도 결정가능하지 않다.

《증 명》

T가 Q의 한 일관적인 연장이라고 가정해 보자. 그러면 보조정리 3에 의해, T의 정리들의 괴델수들의 집합 θ는 T속에 정의가능하지 않다. 이제 만일 A(x,y)가 T속에서 θ의 특징함수 f를 표시한다면, A$(x,\bar{1})$이 T속에서 θ를 정의할 것이다. 그러나 θ는 T속에서 정의가능하지 않다. 그러므로 θ의 특징함수는 T속에서 표시가능하지 않으며, T는 Q의 연장이므로 Q속에서도 또한 표시가능하지 않다. 따라서 T의 정리들의 괴델수들의 집합 θ의 특징함수는 회귀적이 아니며, 결국 T는 결정가능하지 않다.

《보조 정리 4》

Q는 결정가능하지 않다.

《증 명》

Q는 Q의 한 일관적인 연장이다.

《정리 3》

산술은 결정가능하지 않다.

《증 명》

산술은 Q의 한 일관적인 연장이다. 그리고 정리 2에 의해 Q의 어떠한 일관적인 연장도 결정가능하지 않다.

이로써 우리는 산술이 결정가능하지 않음을 증명하였다. 그러면 산술의 결정불가능성을 주장하는 정리 3과 타르스키의 정의불가능성 정리와의 관계는 어떠한가? 결국 같은 내용을 달리 표현한 것에 불과한 것인가? 아니면, 어떤 것이 더 강한 주장을 하고 있는 것인가? 아니면 둘이 서로 다른 주장을 하고 있는 것인가? 이에 대해 대답할 수 있기 위해서는 회귀적 집합과 정의가능한 집합과의 관계를 살펴보아야 한다. 왜냐하면 산술이 결정불가능하다는 것은 바로 N에서 참인 문장들의 괴델수들의 집합은 회귀적이 아니라는 것이기 때문이다. 실제로 모든 회귀적 집합은 산술 속에서 정의가능하나, 그 역은 성립하지 않으므로, 타르스키의 정의불가능성 정리가 산술의 결정불가능성을 주장하는 정리 3보다 강한 주장을 담고 있다. 모든 회귀적 집합은 산술 속에서 정의가능하나, 산술 속에서 정의가능한 모든 집

합이 회귀적인 것은 아니라는 주장은 앞서 표시가능성과 정의가능성의 관계에 관해 언급할 때, 표시가능한 함수에 의해 특징지워질 수 있는 집합은 모두 정의가능하나, 정의가능한 집합의 특징함수는 일부 표시가능하지 않은 것이 있다고 한 말과 통한다. 모든 회귀적 집합이 산술 속에서 정의가능하다는 것을 증명하여 보자

《 보조 정리 5 》

모든 회귀적 집합은 산술 속에서 정의가능하다.

《 증 명 》

θ가 회귀적 집합이라고 가정하자. 그러면 θ의 특징함수 f는 회귀적이며, 따라서 Q속에 표시가능하다. $A(x,y)$가 Q속에서 θ의 특징함수 f를 표시한다고 가정하자. 그러면 $A(x,\bar{1})$은 Q속에서 θ를 정의할 것이다. 왜냐하면, $k \in \theta$이면, $f(k)=1$이므로 $\vdash_{Q} A(\bar{k},\bar{1})$이고 ; $k \notin \theta$이면, $f(k)=0$이므로 $\vdash_{Q} \forall_y (A(\bar{k},y) \leftrightarrow y=0)$, 즉 $\vdash_{Q} 0 \neq \bar{1}$이므로 $\vdash_{Q} -A(\bar{k},\bar{1})$이기 때문이다. 또 산술은 Q의 연장이므로, $A(x,\bar{1})$은 산술 속에서도 θ를 정의할 것이다. 그러므로 θ는 산술 속에서 정의가능하다.

(c) 처치의 결정불가능성 정리 증명

앞서 지적한 대로 처치의 결정불가능성 정리는 산술 체계의 결정불가능성을 주장하는 것이 아니라, 1차 양화 논리학의 결정불가능성을 주장함에도 불구하고, 그 결과가 1차 산술 체계에 대한 고찰을 통해 얻어졌다는 점에서 흥미롭다. 따라서 우리는 1차 양화 논리학과 1차 산술 체계와의 연관관계를 먼저 고찰할 필요가 있다. 로빈슨 산술 체계 Q가 1차 산술 이론의 한 예이다.

우선 의미론적으로 논리학은 모든 해석에서의 참(논리적 참) 즉 의미론적 타당성을 문제삼으나, 산술 체계는 어떤 한 해석 특히 표준적 해석 N에서의 참만을 문제 삼는다. 구문론적으로 논리학은 어떠한 공리도 갖지 않고 오로지 추론규칙만을 가진 자연적 연역 체계가 가능하나, 산술 체계는 어떤 해석에서 참인 몇몇 유형의 명제들을 꼭 공리로서 가져야만 한다. 다시 말해, 무공리 체계인 자연적 연역 체계가 산술에서는 가능하지 않다. 그러나 논리학은 자연적 연역 체계 뿐만 아니라, 공리 체계도 가능하다. 논리학이 공리체계로 형식화되었을 경우, 논리학은 공리 체계로 형식화된 산술체계와 어떤 차이점을 보이게 되는가? 그것은 논리학이 어떠한 해석에서도 참이되는 논리적 진리들만을 그 공리들로 갖고 있으나, 산술 체계는 특정한 해석에서만 참이되는 해석 의존적 진리들도 그 공리들로 갖고 있다는 것이다. 따라서 논리학의 공리들인 논리적 공리들은 타당한 추론을 보증해 주는

추론규칙으로 변형될 수 있으나, 산술 체계에 고유한 본연의 공리들은 타당한 추론을 보증해 주는 추론규칙으로 변형될 수 없다.

그러면 논리학과 산술체계의 연관 관계는 무엇일까? 산술체계는 논리학을 기반으로 형성된다. 논리학이 자연적 연역 체계로 형식화된 경우, 산술체계는 자신의 고유한 본연의 공리들만을 공리로 삼고 논리학의 추론 규칙들을 빌어 자신의 추론 규칙으로 사용하는 공리 체계가 된다. 즉 공리가 없는 논리학에다 자신의 고유한 공리들을 공리로서 첨가한 체계이다. 논리학이 공리 체계로 형식화된 경우는, 산술체계는 논리학의 논리적 공리에다 산술 자신의 고유한 공리들을 첨가한 공리 체계이다. 즉 논리학에다 자신의 고유한 공리들을 첨가한 체계인 것이다. 결국 논리학이란 논리적 참에서 논리적 참을 연역하는, 혹은 무전제에서 논리적 참을 도출하는 형식 체계이나, 산술 체계는 참에서 참을 연역하는 혹은 논리적 참과 참에서 참을 연역하는 형식 체계이다. 따라서 논리학의 정리들은 모두 의미론적으로 타당하나 즉 논리적 참이나, 산술의 정리들은 논리적 참이되지 못하고, 오로지 주어진 해석에서만 참이되는 것이 대부분이다.

이제 보다 구체적으로 산술의 언어를 자신의 언어로 갖는 1차 양화 논리 체계 L과 1차 산술 이론인 로빈슨 산술 체계 Q와의 연관 관계를 살펴보자. L은 1차 양화 논리학의 한 특수한 체계이다. L은 산술의 언어를 자신의 언어로 가지므로 1차 양화 논리학과 마찬가지로 자신의 언어 속에 11개의 논리적 기호와 무한의 변수들을 갖고 있다. 그렇지만 1차 양화 논리학이 무한의 문장기호, 술어기호, 함수기호, 이름들을 가지고 있음에 반해, L은 문장기호와 술어기호는 없고 1개의 이름과 3개의 함수기호만을 갖을 뿐이다. 그러나 L이 타당성을 문제 삼는 논리체계임은 확실하다. 왜냐하면, L이 자연적 연역 방식으로 형식화되었을 경우, L의 공리들은 없고 추론 규칙들은 다름아닌 1차 양화 논리학의 추론 규칙들이기 때문이다. L이 공리적 방식으로 형식화되었을 경우, L의 공리와 추론규칙은 다름아닌 1차 양화 논리학의 공리와 추론규칙이기 때문이다. 따라서 L의 정리들은 산술언어로 표현될 수 있는 모든 그리고 오로지 타당한 문장들 뿐이다.

Q는 L에다 자신의 고유한 7개의 공리들을 첨가한 산술체계이다. 따라서 L의 정리들은 모두 Q의 정리들이나, 그 역은 성립하지 않는다. 실제로 Q의 정리들 중에는 많은 것들이 표준적 해석 *N*에서는 참이나, 논리적 참은 아니다. 그리고 Q의 모든 공리들이 타당한 것은 아니므로 (실제로는 Q의 어떤 공리도 타당하지 않다), L은 Q의 연장 이론이라 할 수 없다. 그러나 Q의 정리와 L의 정리는 어떤 밀접한 연관 관계가 있다.

C를 Q의 7공리들의 연접이라고 가정하자. 그러면 문장 A가 Q의 정리일경

우, 그리고 오로지 이 경우에 한해서만 (C→A)는 L의 정리이다. 즉 C는 A를 함축한다. 혹은 (C→A)는 타당하다. 따라서 L의 일부 문장들 (즉, C를 전건으로 갖는 조건문들)의 타당성에 대한 결정 가능성은 Q의 정리에 대한 결정가능성을 뜻하게 된다. 다시 말해, A가 Q의 정리인지의 여부를 결정할 수 있으면 (C→A)의 타당성 여부는 자동적으로 결정되며, 그 역도 역시 성립한다. 결국 일차 양화 논리학의 모든 문장들의 타당성 여부를 결정할 수 있기 위해서는 적어도 산술의 언어를 자신의 언어로 갖는 L의 모든 문장들의 타당성 여부를 결정할 수 있어야 하며, L의 모든 문장들의 타당성 여부를 결정하기 위해서는 적어도 Q의 모든 문장들의 정리성 여부를 결정할 수 있어야 한다. 왜냐하면 L은 1차 양화 논리학의 언어 중 일부만을 자신의 언어로 갖고 있으며, 또 L의 모든 문장들의 타당성 여부가 결정될 수 있기 위해서는 그 중의 일부인 C를 전건으로 갖는조건문들의 타당성 여부가 적어도 결정될 수 있어야하기 때문이다. 그리고 C를 전건으로 갖는 조건문들의 타당성에 대한 결정가능성은 바로 Q의 정리들에 대한 결정가능성을 뜻하기 때문이다. 그러나 앞서 밝힌 대로 Q는 결정가능하지 않다. 따라서 L도 결정가능하지 않으며, 1차 양화 논리학도 결정가능하지 않다. 결국, 처치의 정립이 거짓이 아니라면, 1차 양화 논리학의 문장들이 타당한지의 여부를 결정할 수 있는 기계적인 방법은 존재하지 않는다. L이 결정가능하지 않다는 처치의 결정불가능성 정리를 증명하여 보자.

《정리 4》 (처치의 결정불가능성 정리)

L은 결정가능하지 않다.

《증 명》

C를 Q의 공리들의 연접이라고 가정하자. 그러면 문장 A는 Q의 정리인 경우에 그리고 오로지 이 경우에만 C가 A를 함축한다. 즉 (C→A)는 타당하다. 혹은 (C→A)는 L의 정리이다.

q를 C의 괴델수라 하자. 그리고 f를 다음과 같이 정의하자 :

$$f(n) = 1 * (q * (399 * (n * 2))).$$

f는 회귀적이다. 그리고 n이 A의 괴델수라 하면, $f(n)$은 (C→A)의 괴델수이다.

λ를 L의 정리들의 괴델수들의 집합이라 하자. 만일 λ가 회귀적이면, $\{ n \mid f(n) \in \lambda$ 그리고 n은 산술언어에 속한 한 문장의 괴델수이다$\}$ 도 회귀적이다. 그러나 이 집합은 바로 Q의 정리들의 괴델수들의 집합이며, 보조 정리 4에 의해 이 집합은 회귀적이 아니다. 그러므로 λ는 회귀적이 아니며 따라서 L은 결정가능하지 않다.

(d) 괴델의 불완전성 정리 증명

이론 T의 언어에 속한 모든 문장 A에 대해 A나 혹은 −A가 T의 정리이면, 이론 T는 완전하다고 한다. 이론 T가 일관적이고 완전한 경우, 그리고 오로지 이 경우에만, 어떠한 문장 A에 대해서도 A와 −A 둘 중 꼭 하나만 정리이다. 산술은 Q의 일관적이고 완전한 연장이다.

만일 이론 T의 결정가능한 부분집합이 있고, 이 부분집합의 논리적결과들이 모두 그리고 오로지 T의 정리들일 때, 이론 T는 공리화가능 하다고 한다. 만일 위와 같은 조건을 만족하는 유한한 부분집합이 있을 경우, 이 이론은 유한적으로 공리화가능하다고 한다. 어떠한 결정가능한 이론도 공리리화가능하다는 것은 공리화 가능성의 정의로부터 명백하다. Q는 결정가능하지는 않으나 유한적으로 공리화 가능한 이론의 한 예이다.

괴델의 불완전성 정리의 한 형태는 Q의 완전하고, 일관적이고, 공리화가능한 연장은 불가능하다는 것이다. 이 괴델 정리는 앞서 증명한 정리 2와 아래에서 증명할 "어떠한 공리화 가능한 완전한 이론도 결정 가능하다"는 정리 5로부터 도출된다.

《정리 5》

어떠한 공리화 가능한 완전한 이론도 결정 가능하다.

《증 명》

T를 어떤 이론이라고 하자. 그러면 이론 T의 언어에 속한 문장들 속에 나타날 수 있는 기호들의 집합은 결정 가능하므로, T의 언어에 속한 문장들의 집합 자체도 결정 가능하다. 이제 T가 공리화 가능하고 동시에 완전하다고 하자. 그리고 T가 비일관적(모순적)이라고 가정하자. 그러면 모순은 모든 것을 함축하므로, T의 정리들은 바로 T의 언어에 속한 모든 문장이 되며, 이 문장들의 집합은 위에서 밝힌대로 결정 가능하다. 따라서 우리가 증명해야 할 것은 T가 공리화 가능하고, 완전하고, 일관적일 경우 T가 결정 가능하다는 것이다.

T가 공리화 가능하므로, 자신의 논리적 결과들이 모두 그리고 오로지 T의 정리들인 결정 가능한 문장들의 집합 S가 존재한다. A를 T의 언어 속의 한 문장이라 하자. 그리고 전건이 S의 원소들의 연접이고 후건이 A나 혹은 −A인 조건문을 A관련 문장이라 하자. 따라서 A관련 문장은 항상 한 쌍이 존재한다. 그리고 A가 T의 정리이면 그리고 오로지 이 경우에만 후건이 A인 타당한 A관련 문장이 존재한다. 또 T가 일관적이고 완전하므로 A가 T의 정리이면 그리고 오로지 이 경우에만 −A는 T의 정리가 아니다. 즉 후건이 −A인 타당한 A관련 문장이 존재하지 않는다. S가 결정가능하므로 A관련 문장들의 집합도 결정 가능하다.

우리는 여기서 1차 양화 논리학이 완전하다는 것을 증명없이 가정하자.* 1차 양화 논리학이 완전하다는 것은 1차 양화 논리학의 타당한 모든 논리식이 증명 가능하다는 것이다. 다시 말해, 1차 양화 논리학의 어떤 논리식이 타당하면, 그것의 타당성을 증명할 수 있는 기계적인 방법이 존재한다는 것이다.

그리고 T가 결정 가능하다는 것을 보이기 위해 우리는 이론 T의 언어에 속하는 임의의 문장 A가 주어졌을 때, A가 T의 정리인지의 여부를 가려낼 수 있는 기계적인 방법이 있다는 것을 보이기만 하면 된다.

T가 일관적이고 완전하므로, A나 −A의 둘 중에 꼭 하나만이 T의 정리가 된다. 따라서 A관련 문장들 둘 중에서 한 문장에 대해서는 그것의 타당성을 증명할 수 있는 기계적인 방법이 존재한다. 따라서 만일 A를 후건으로 하는 A관련 문장이 타당하면, 우리는 A가 T의 정리임을 알아낼 수 있는 기계적인 방법을 갖게 된다. 만일 −A를 후건으로 하는 A관련 문장이 타당하면, 우리는 A가 T의 정리가 아님을 알아낼 수 있는 기계적인 방법을 갖게 된다. 이 양자를 종합하면, 우리는 결국 A가 T의 정리인지의 여부를 결정할 수 있는 기계적인 방법을 갖게 된다.

《정리 6》(괴델의 불완전성 정리)

Q의 어떠한 일관적이고, 완전하고, 공리화 가능한 연장도 존재하지 않는다.

《증 명》

정리 6은 정리 2와 정리 5의 직접적인 결과이다. A를 Q의 일관적 연장, B를 공리화 가능하고 완전한, P를 결정 가능함을 뜻하는 술어라고 가정할 경우 그 증명은 다음과 같다.

$$\begin{array}{ll} \forall x(Ax \rightarrow -Px) & \text{〔정리 2〕} \\ \underline{\forall x(Bx \rightarrow Px)} & \text{〔정리 5〕} \\ \therefore -\exists x(Ax \mathbin{\&} Bx) & \text{〔정리 6〕} \end{array}$$

《따름 정리》

산술은 공리화 가능하지 않다.

《증 명》

산술이란 바로 Q의 일관적이고 완전한 연장이므로, 정리 6으로부터 곧바로 도출된다.

이로써 괴델의 불완전성 정리는 증명되었다. 이제 왜 산술체계의 결정불가능성은 곧바로 산술체계의 불완전성을 함축하나, 논리학의 결정불가능성은 논리학의 불완전성을 함축하지 않는지 알아보자. 우리는 먼저 산술체계의 결정불가능성, 불완전성 개념이 논리학의 결정불가능성, 불완전성 개념

과 다른 것이 아닌가를 의심해볼 수 있다.

우선 산술체계의 결정불가능성 개념과 논리학의 결정불가능성 개념은 서로 다른 것이 아니다. 왜냐하면 양 결정불가능성 모두 논의되고 있는 이론의 정리들의 괴델수들의 집합이 회귀적이 아니라는 것을 뜻하며, 처치의 정리가 거짓이 아니라면, 이것은 양자 모두 논의되고 있는 이론에 속한 모든 문장들이 그 이론의 정리인지의 여부를 결정할 수 있는 기계적인 방법이 존재하지 않는다는 것을 의미하기 때문이다. 완전성 / 불완전성 개념은 어떠한가? 우리는 논리학에서의 완전성은 타당한 논리식이 모두 증명가능하다는 것, 즉 어떠한 해석하에서도 참이 되는 논리식은 모두 논리학의 정리가 된다는 것으로 정의하였으며, 산술 체계에서의 완전성은 논의되고 있는 산술 체계에 속한 모든 문장 A에 대해, A나 혹은 −A 둘 중 적어도 하나가 그 산술 체계의 정리가 되는 것으로 정의하였다. 주어진 대로의 정의에 따르면, 논리학에서의 완전성 개념과 산술 체계에서의 완전성 개념은 완전히 다른 것처럼 보인다. 그러나 그 근저를 따져보면 실제로는 이 양자의 개념은 결코 우연히 이름만이 일치하는 별개의 것이 아니다.

이 양 완전성은 모두 건전성과 더불어 모형 이론적(Model-Theoretic) 접근과 증명 이론적(Proof-Theoretic)접근 사이의 동치성을 보장해 주는 개념이다. 보다 구체적으로 말해, 이 양 완전성은 모두 어떤 체계에서 의미론적으로 합당한 식은 모두 증명가능하다는 것 즉 그 체계의 정리가 된다는 것을 뜻한다. 논리학은 모든 해석에서의 참 즉 타당성을 문제 삼으므로, 논리학에서의 의미론적인 합당성은 바로 타당성이 된다. 따라서 위의 정의는 논리학에서의 의미론적 완전성(Semantic Completeness) 정의와 꼭 들어 맞는다. 이에 반해 산술 체계는 표준적 해석 N에서의 참을 문제 삼으므로, 산술 체계에서의 의미론적 합당성은 바로 N에서의 진리성이 된다. 따라서 위의 정의에 따르면, 산술 체계에서의 완전성은 표준적 해석 N에서 참인 식은 모두 증명가능하다 혹은 산술 체계의 정리가 된다는 것이다.

그러면 이와 같이 새로이 정의된 완전성 개념과 산술 체계에서의 원래의 완전성 개념은 어떻게 별개의 것이 아닐 수 있는가? 산술 체계란 Q의 일관적인 연장 이론들이므로, 모두 일관적인 체계이다. 따라서 산술 체계에서의 완전성 개념은 항상 산술 언어에 속한 모든 문장 A에 대해, A나 혹은 −A 둘 중 적어도 하나는 그 산술 체계의 정리가 된다는 원래 정의 보다 강한, 즉 A나 혹은 −A 둘 중 꼭 하나만 그 산술 체계의 정리가 된다는 부정—완전성(negation-Completeness)을 의미하게 된다. 그리고 산술에 대한 표준적 해석에 따르면, 산술에 속한 모든 문장 A에 있어서 A는 참이거나 거짓이고, 또 A가 참이면 −A는 거짓이고, −A가 참이면 A는 거짓

이다. 따라서 새로이 정의된 완전성 개념에 따르면, 산술 체계가 완전하다는 것은 표준적 해석 *N*에서 참인 문장은 모두 산술 체계의 정리가 된다는 것을 뜻하며, 이것은 다시금 산술 언어에 속한 모든 문장 A에 대해, A나 혹은 −A 둘 중 꼭 하나만 그 산술 체계의 정리가 된다는 부정—완전성을 뜻하게 된다. 그러므로 산술 체계에 있어, 새로이 정의된 의미론적 완전성과 부정—완전성은 서로 별개의 개념이 아니고, 같은 현상을 기술하는 서로 다른 두 방식인 것이다.

결국 우리의 문제거리 즉 왜 산술 체계의 결정불가능성은 곧바로 산술 체계의 불완전성을 함축하나, 논리학의 결정불가능성은 논리학의 불완전성을 함축하지 않는가 하는 문제거리는 산술 체계의 결정불가능성, 불완전성 개념이 논리학의 결정불가능성, 불완전성 개념과 다르기 때문에 발생한 것이 아님을 알 수 있다. 그러면 그 이유는 무엇일까? 콰인은 다음과 같이 답한다.*

> 우리가 도식(즉, 논리식)들의 속성에 대한 것이 아니라, 기초 수이론(즉, 산술)에서와 같이 진술의 진리성에 대한 완전한 증명 과정과 결정 과정에 관심을 갖을 때는, 만일 우리의 어휘가 부정기호를 포함하고 있다면, 완전한 증명 과정과 결정 과정 사이의 차이는 사라진다. 왜냐하면, 진술의 진리성에 대한 증명 과정은 그것 자체로서 반증 과정을 뜻하기 때문이다. 당신은 어떤 진술을 그 진술의 부정문을 증명함으로써 반증할 수 있다. 따라서 진술의 진리성에 대한 완전한 증명 과정은 결정 과정을 확보하여 준다. 그러나 도식(논리식)들의 타당성, 일관성, 비일관성에 대한 완전한 증명 과정은 이러한 도식들의 속성들에 대한 결정 과정에 훨씬 못미친다. 왜냐하면 한 도식은 그 도식의 부정이 비일관적이 아니어도 일관적일 수 있으며, 한 도식은 그 도식의 부정이 타당하지 않아도 부당할 수 있기 때문이다.

그리고 콰인은 완전한 증명 과정과 결정 과정 사이의 차이점을 다음과 같이 말한다.*

> 완전한 증명 과정이 결정 과정과 다른 점은 보다 덜 기계적이라는 데 있지 않다. 그 차이점은 증명 과정이 그렇다—혹은—아니다의 대답을 얻어 내는 과정이 아니라는 것이다. 즉 증명 과정은 '아니다'라는 부정적 대답은 주지 않는다는 것이다. 아무리 조직적으로 그리고 기계적으로 설계되었다 할지라도, 많은 수의 과정들을 거친 후에도 비일관성에 대한 증명에 도달하지 못했다는 것이 일관성을 입증해 주지는 못하다. 증명 과정

> 은 오로지 결정 과정의 반쪽에 불과하다. 증명 과정과 반증 과정 양자가 존재할 때 결정 과정도 역시 존재한다.

콰인의 말을 간략히 요약하자면, ① 논리학은 타당성, 일관성등과 같이 도식(논리식)들의 속성을 다루는 반면, 산술은 진술의 진위성만을 다루며, ② 타당한 도식의 부정은 부당한 도식이 아니라, 모순적(비일관적)인 도식이 되는 반면, 참인 진술의 부정은 거짓인 진술이 되기 때문에 또 ③어떤 진술이 결정 가능하다는 것은 그 진술이 참일 경우 증명가능하며 거짓일 경우 반증가능하다는 것을 뜻하므로, 즉 결정 가능성이란 증명가능성과 반증가능성 양자를 결합한 개념이기 때문에, 산술 체계에서는 완전한 증명 과정의 존재가 결정 과정의 존재를 보증하나, 논리학에서는 그렇지 못하다는 것이다.

구체적으로 정리 5의 증명 과정을 살펴보면 콰인의 이러한 설명을 쉽게 이해할 수 있을 것이다. 1차 양화 논리학이 완전하다는 것, 즉 1차 양화 논리학의 타당한 모든 논리식이 증명가능하다는 사실은 산술 체계 T가 결정가능하다는 사실을 보증하여 주나, 논리학 자체가 결정가능하다는 사실은 보증하여 주지 못한다. 왜냐하면, 타당한 도식의 부정문은 부당한 도식이 되는 것이 아니라, 모순적인 도식이 되므로 1차 양화 논리학의 타당성에 대한 완전한 증명가능성은 1차 양화 논리학의 부당한 모든 논리식의 반증가능성을 보증하여 줄 수 없기 때문이다.

Ⅵ. 맺는 말

이로써 우리는 산술적 진리의 정의불가능성에 관한 타르스키의 정리, 논리학의 결정불가능성에 관한 처치의 정리, 그리고 산술의 불완전성에 관한 괴델의 정리가 모두 어떻게 거짓말장이 역설과 같은 의미론적 역설의 응용결과로서 얻어졌는가? 또 논리학에 관한 메타 정리인 처치의 정리가 어떻게 산술 체계에 대한 연구를 통해서 얻어졌는가? 그리고, 산술 체계의 완전성은 곧바로 산술 체계의 결정가능성을 함축하나, 왜 논리학의 완전성은 논리학의 결정가능성을 함축하지 않는가 하는 우리의 의문점들에 대해 모두 답을 한 셈이다. 끝으로 이들 세 정리가 갖는 의의에 대해 간략히 살펴보자.

타르스키 정리는 어떠한 일관적인 형식 언어도 자기 자신에까지 적용되는 진리 이론을 적절히 형성하는데 사용될 수 없다는 것을 보여 주었다. 보다 간략히 말해, 타르스키 정리는 어떠한 일관적인 형식 언어도 자신의 의미론을 구축하는데는 적절하지 않다는 것을 보여 주었다. 그리고 처치의 정리

는 논리학이 결코 완전히 기계화될 수 없고, 추론의 부당성을 인지하는 일에 관한 한,인간의 직관적 통찰력이 필요한 공간이 남아 있다는 것을 보여주었다. 또 괴델의 정리는 산술 언어에 대한 표준적 해석에서의 수학적 진리 개념을 증명가능성 혹은 정리성 개념과 동일시했던 종래의 견해가 잘못되었음을 보여 주었다. 왜냐하면, 앞서 지적한 대로 괴델 정리에서 문제 삼고 있는 산술 체계에 있어서의 부정—완전성이란 다름아닌 의미론적 (모형 이론적) 접근과 구문론적(증명 이론적) 접근 사이의 동치성을 주장하는 의미론적 완전성을 뜻하기 때문이다. 괴델 정리란 결국 산술의 의미론적 불완전성에 대한 주장인 것이다.