역수학 계획에서 힐버트의 계획으로: 힐버트의 실증주의적 수리 철학

최 병 일
(연세대 강사)

1. 들어가는 말

1931년 불완전성 정리가 처음으로 괴델에 의하여 증명된 이래, 그 의미에 대하여 많은 철학자들과 수학자들의 논의가 있었다. 그 중에서도 '힐버트의 계획'과의 관계와 그 의미에 대한 논의는 수리 논리학과 수리 철학에 있어 최근까지도 계속되고 있다. 이러한 논의는 최근 소위 '역수학 계획'(Reverse Mathematics Program)에 의하여 "힐버트의 계획이 부분적으로 실현될 수 있다"는 주장이 제기된 이후에는 더욱 활발하게 진행되게 되었다.[1)]

'역수학 계획'은 1974년 프리드만(Harvey Friedman)이 국제 수학자 대회에서 발표한 「2계 산술의 몇 가지 체계들과 그 사용」(Friedman 1975)이라는 논문에서 제시한 연구 주제로부터 출발되

1) "역수학 계획"(Reverse Mathematics Program)에 대한 직접적인 논의는 Stephen G. Simpson의 저작들(Simpson 1985, Simpson 1987, Simpson 1988)을 참조할 것. '역수학 계획'과 '힐버트의 계획'의 관계에 대한 논의는 1988년의 "힐버트의 계획에 대한 심포지엄"(Journal of Symbolic Logic, Vol. 53, No. 2, 337-384쪽)에서 발표된 논문들과 Roman Murawski의 저작들(Murawski 1993, Murawski 1994)에서 찾아볼 수 있다.

었다. 프리드만은 수학에 있어서의 특정한 정리들을 증명하는 데 있어 고유한 공리들이 무엇이며, 그러한 공리들을 특징적으로 포함하는 형식 체계는 무엇인가라는 문제를 제기하고, 그러한 문제의 해결을 위해 '2계 산술의 부분 체계들'(subsystems of second order arithmetic)에 대한 체계적인 연구가 필요하다고 주장하였다. 이러한 주장은 수학이 2계 산술의 형식 체계에 의하여 형식화될 수 있다는 연구 결과(Hilbert-Bernays 1934, 1939)에 바탕을 둔 것으로, 프리드만은 2계 산술의 언어가 몇몇 근본적인 수학의 정리들을 직접적으로 형식화하기에 충분하며, 수학의 형식화에 적절한 가능한 언어들 중에 기본적인 언어라는 점을 지적하였다.[2] 더 나아가, 프리드만은 2계 산술의 부분 체계들 내에서 어떠한 수학적 정리가 올바른 공리들로부터 증명되어질 때, 종종 그 공리들이 다시 그 정리로부터 증명될 수 있다는 것을 주목하고, 그러한 '현상'을 연구하고자 제안하였다.

1982년 심슨(Stephen G. Simpson)은 프리드만의 연구 주제와 관련한 그 동안의 결과들을 논의하면서, 프리드만이 주목한 '현상'을 '역수학(REVERSE MATHEMATICS)의 현상'이라고 불렀다. 심슨은 먼저 '일상적 수학'(ordinary mathematics)과 집합론적 수학(set-theoretic mathematics)을 구분하고, 전자를 추상적 집합론이 수학에 도입되기 이전의 수학, 예를 들어 수론(number theory), 기하학(geometry), 미적분(calculus) 등을 포함하는 '비집합론적 수학'(non-set-theoretic mathematics)을 의미한다고 하였다. 반면에 후자에는 추상적 집합론을 포함하여, 함수 해석(functional analysis), 추상

2) Friedman 1975, 235쪽. Simpson(Simpson 1985, 462쪽)이 지적하였듯이 2계 산술의 언어에 의해서 수학을 형식화하는 것은 '부호화'(coding)나 2계 산술의 '보존적 연장들'(conservative extensions)을 도입함으로써 가능하게 된다.

대수학, 일반 위상학(general topology) 등이 속하는 것으로 보았다. 이제 일상적 수학을 2계 산술 체계에 의하여 형식화하고, 일상적 수학의 정리들을 2계 산술의 부분 체계를 이루는 공리들에 의해 증명하는 (프리드만의 본래의) 문제는 그러한 공리들이 특정한 집합의 존재를 의미하는 '집합 존재 공리'(set existence axiom)들이기에, "일상적 수학의 정리들을 증명하는 데에는 어떠한 집합 존재 공리가 필요한가?"라는 문제로 바뀌게 된다. 이러한 문제의 해결을 위한 연구라는 시각에서 그 동안의 2계 산술의 부분 체계의 연구 결과를 논의한 뒤, 심슨은 다음과 같은 언급을 하였다:

> 아주 자주, 일상 수학의 정리가 가능한 가장 약한 집합 존재 공리들로부터 증명되어지면, 그 정리가 약한 기본 이론 내에서 그 공리들과 동치라는 것을 증명함으로써 그 정리를 "역전"시키는 것이 가능하다. 이러한 현상은 역수학이라고 알려져 있다.[3)]

동시에 심슨은 이러한 역수학이 "강한 집합 존재 공리들의 일상 수학에 있어서의 역할을 탐구하는 것을 목적으로 하는 연구 계획"(Simpson 1988, 355쪽)으로서 힐버트의 계획과 관계가 있다고 보았다. 구체적으로, 그는 1985년 미국 철학회(APA)와 기호 논리학회(ASL)의 겨울 모임에서 그가 발표한 「힐버트의 계획의 부분적 실현들」(Simpson 1988)이라는 논문에서 역수학 계획이 힐

---

3) Simpson 1985, 467쪽: "*Very often, if a theorem of ordinary mathematics is proved from the weakest possible set existence axioms, it will be possible to "reverse" the theorem by proving that it is equivalent to those axioms over a weak base theory*. This phenomena is known as *REVERSE MATHEMATICS*." 심슨은 이 'reverse mathematics' 라는 명칭을 보통 수학에서 공리로부터 정리를 이끌어 내는 것을 'forward mathematics'라는 명칭으로 부를 수 있다는 의미로 사용하였다.(Simpson 1988, 356쪽)

버트의 계획의 부분적 실현이 가능함을 보여준다고 주장하였다.

심슨은 이러한 주장을 세 단계의 과정을 거쳐 입증하고자 하였다. 첫 번째 단계로 심슨은, 힐버트가 그의 계획에 대하여 언급한 것(주로 그의 「무한에 관하여」(Hilbert 1925)라는 논문)을 기반으로 하여, 힐버트의 계획이 무한의 수학을 유한의 수학으로의 환원을 통하여 정당화하려는 것이라고 규정하였다. 두 번째는 이러한 힐버트의 계획의 비형식적 서술을 "힐버트의 원래 의도에 충실하게"(Simpson 1988, 349쪽) 위의 규정에 등장하는 용어들을 명확하게 형식적으로 정의하여 힐버트의 계획을 형식화하여 서술하는 것이다. 마지막으로, 이렇게 형식화된 힐버트의 계획이 비록 괴델의 불완전성 정리에 의하여 명백하게 반박되지만, 역수학의 계획에 속하는 탐구에 의하여 부분적으로 실현될 수 있다는 것을 보이는 것이다.

역수학 계획과 힐버트의 계획의 관계에 대한 지금까지의 논의는 훼퍼만(Solomon Feferman)과 같이 메타수학적 관점에서 프리드만과 심슨 등의 역수학 계획을 힐버트의 계획의 상대화(relativization)의 한 방향으로서 "본래의 힐버트의 계획에 대한 중요한 공헌"(Feferman 1993, 159쪽)이라고 하거나, 무라부스키(Roman Murawski)처럼 역수학에 의하여 "힐버트의 계획이 부분적으로 실현될 수 있다"(Murawski 1993, 181쪽)고 보는 논의가 있었다.

본 논문에서는 역수학 계획이 힐버트의 계획을 부분적으로 성공시킬 수 있도록 한다는 심슨의 주장을 구체적으로 소개하고, 그러한 주장이 과연 힐버트의 계획에 있어서의 힐버트의 의도, 특히 그의 '철학적 의도'를 제대로 반영하는 것인가에 대하여 논의하고자 한다. 이를 위하여 힐버트의 계획이 지니는 인식론적

정당화의 계획이라는 측면을 논의한 뒤, 그러한 인식론적 정당화의 철학적 기초로서의 힐버트의 '유한 수학' 또는 '유한 주의'(finitism)가 지니는 철학적 의미를 강조하고자 한다. 즉, 힐버트의 '유한 주의'는 심슨이나 테이트(William Tait)가 주장하듯이 '원시적 회기 산술'(Primitive Recursive Arithmetic, PRA)과 일치하는 수학적 체계라기보다는 힐버트의 경험주의적이고, 실증주의적인 수리 철학을 나타내는 철학적 입장이라고 보아야 한다.[4]

2. 메타 수학적 배경

이 절에서는 앞으로 있을 논의를 위한 간단한 메타 수학적 배경들을 서술하고자 한다. 즉, 1계 산술(first order arithmetic) 또는 Peano Arithmetic(PA)이라고 불리는 형식 체계와 원시 회귀 산술(Primitive Recursive Arithmetic, PRA)이라고 불리는 1계 산술의 부분 체계, 그리고 2계 산술(second order arithmetic)과 그 부분 체계들을 정의하고, 관련된 용어들을 정의하도록 하자.[5]

1 계 산술의 언어 L_0는 유형(type) 0의 변항, 즉 1계 변항 x, y, z, . . . , 상항 기호 0, 연속자 기호(successor symbol) ′, 그리고

---

4) 최근 Ulrich Majer는 "*Different forms of finitism*"(Majer 1993)라는 논문에서 힐버트의 '유한 주의'에 대한 심슨의 논의를 비판하였다. 그는 Weyl이 괴델의 정리들이 증명된 이후에도 힐버트의 계획에 대해 동조하였던 것을 힐버트의 계획이 지니고 있는 "인식론적 측면", 즉 수학의 기초를 수학적으로 뿐 만이 아니라, "철학적으로도" 공고히 하려는 힐버트의 의도에 동의하였기 때문이라고 보면서, 심슨의 역수학의 계획에서 힐버트의 유한 주의를 PRA와 일치하는 것으로 보는 것이 힐버트의 진정한 '인식론적 의도'를 도외시하는 것이라 하였다.(Majer 1993, 189쪽)

5) 본 절에서의 메타수학적 정의들은 주로 Feferman 1988 과 Fefermann 1993을 따르도록 하겠다. Feferman의 정의 방식은 *PRA*가 *PA*의 부분체계라는 것을 명확히 드러낼 수 있다는 점에서 여타의 다른 방식보다도 낫다고 여겨진다

각 원시적 회기 함수(primitive recursive function) +, ·, . . . 등에 대응되는 함수 기호들 f_0, f_1, . . . 로 이루어진다. L_0 의 항(term)들 t_1, t_2, . . . 의 집합은 변항들과 상항 0, 그리고 ′와 각 fi에 의하여 닫혀진 집합이다. L_0의 원자 정식(atomic formula)들은 항들 사이의 동일식(equation) $t_1 = t_2$들이다. L_0 의 정식(formula)들의 집합은 원자 정식들과 명제 논리 기호 ¬, ∧, ∨, → 들과 술어 논리 기호, 또는 한량사 ∀, ∃와 임의의 변항의 결합에 의한 한량(quantification)에 의하여 닫혀진 집합이다.

L_0 의 정식 φ가 한량사를 포함하고 있지 않으면, φ를 '한량사에서 자유롭다'(quantifier-free)고 하고, $\varphi \in QF$ 라고 표시한다. L_0의 정식이 ∃로 시작되어 ∀과 ∃이 차례대로 반복되는 n개의 한량사들을 지니고 있고, QF 에 속하는 정식으로 끝난다면, 그 정식은 Σ_n^0 에 속하는 정식이라고 한다. 예를 들어 $\psi \in QF$ 이고 $\varphi = (\exists y)(\forall x)(\exists z)\psi$이라면, $\varphi \in \Sigma_3^0$라고 표시할 수 있다. 반대로 L_0의 정식이 ∀로 시작되어 ∃과 ∀이 차례대로 반복되는 n개의 한량사들을 지니고 있고, QF 에 속하는 정식으로 끝난다면, 그 정식은 Π_n^0에 속하는 정식이라고 한다. 예를 들어 $\psi \in QF$ 이고 $\varphi = (\forall x)(\exists y)\psi$이라면, $\varphi \in \Pi_2^0$라고 표시한다.

산술(arithmetic)은 고전적 1계 술어 논리를 바탕으로 하여, 다음과 같은 기본적인 공리들을 포함한다: (1) $x' \neq 0$ (2) $x' = y' \rightarrow x = y$ (3) $x + 0 = 0 \wedge x + y' = (x + y)'$ (4) $x \cdot 0 = 0 \wedge x \cdot y' = x \cdot y + x$, 그리고 각 원시적 회기 함수 기호 f_i 의 원시 회기적 정의들에 대응되는 공리들. 이러한 기본적인 산술의 공리들에 다음과 같은 귀납 공리 형태(Induction Axiom Scheme)

$$\text{IA.} \quad \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$$

를 L_0의 모든 정식 $\varphi(x)$에 대해 적용한 공리들을 더하면 1계 술어 산술(first order arithmetic) 또는 Peano Arithmetic(PA)을 얻게 된다. 따라서 1계 산술의 부분 체계들은 IA를 특정한 정식들, 예를 들어 $\Sigma^0_0, \Sigma^0_1, \Sigma^0_2$ 등에 속하는 정식 $\varphi(x)$으로 '제한'함으로써 얻어질 수 있다. 이렇게 얻어지는 1계 산술의 부분 체계는 각각 $I\Sigma_0, I\Sigma_1, I\Sigma_2$ 등으로 표시한다.

PA의 부분 체계로서의 원시 회계 산술 즉 PRA는 L_0에 속하는 정식들 중에서 QF에 속하는 정식들로 이루어 진 언어를 바탕으로 산술의 기본 공리들 및 다음의 귀납 규칙(Induction Rule)

$$\text{IR.} \quad \frac{\varphi(0),\ \varphi(x) \rightarrow \varphi(x')}{\varphi(x)}$$

을 모든 $\varphi \in QF$에 대해 적용하는 형식 체계로서 정의할 수 있다.

2계 산술의 언어 L_1은 1계 산술의 언어 L_0에 유형 1의 변항, 즉 집합 변항(set variable) X, Y, Z, . . . 등과 개체와 집합 사이의 원소 관계 기호 $\in$를 덧붙여서 구성하게 된다. 따라서 L_1의 항들은 집합 변항을 포함하는 것으로 확장되고, 원자 정식도 임의의 항 t와 집합 변항 X에 대해 $t \in X$라는 정식을 포함하는 것으로 확장되게 된다. 마지막으로 L_1의 정식들의 집합은 집합 변항 X, Y 등에 대한 한량사 $\forall X$나 $\exists Y$ 등에 의해서도 닫히는 집합으로 확장되게 된다.

L_1의 정식들 중에서 QF, Σ^o_n, Π^0_n 등에 속하는 정식들의 정의는 각 정식들이 집합 변항을 포함하고 있을 수 있다는 점을 제외하고는 L_0의 경우와 같다. L_1의 정식들 중에서 속박된 집합 변항

을 포함하고 있지 않은 정식들은 '산술적'(arithmetical) 정식이라 하고, 그러한 정식들의 모임을 $Arith$ 또는 $\bigcup_n \Pi^0_n$ 또는 Π^0_∞ 으로 표시한다. L_1의 정식들 중에서 집합 변항에 대한 한량사들이 모두 앞에 있고, ∃로 시작되어 ∀과 ∃이 차례대로 n개 반복되고, $Arith$에 속하는 정식으로 끝난다면, 그 정식은 Σ^1_n에 속하는 정식이라고 한다. 예를 들어 $\psi \in Arith$이고 $\varphi=(\exists Y)(\forall X)(\exists Z)\psi$이라면, $\varphi \in \Sigma^1_3$라고 표시할 수 있다. 반대로 L_1의 정식이 집합 변항에 대한 한량사들이 모두 앞에 있고, ∀로 시작되어 ∃과 ∀이 차례대로 n개 반복된 뒤, $Arith$에 속하는 정식으로 끝난다면, 그 정식은 Π^1_n 에 속하는 정식이라고 한다. 예를 들어 $\psi \in Arith$이고 $\varphi=(\forall X)(\exists Y)\psi$이라면, $\varphi \in \Pi^1_2$라고 표시한다.

2계 산술 Z_2 (또는 Π^1_∞- CA_0로 표시)의 공리들은 1계 산술의 공리들을 L_1의 정식들에 대해 적용하여 얻어진 공리들과 다음과 같이 집합 변항 X가 자유 변항으로 있지 않는 L_1의 정식 φ에 대한 포함 공리(Comprehension Axiom) 형태를 더함으로써 얻어진다:

CA. $\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$.

2계 산술의 부분 체계들은 포함 공리 및 귀납 공리들을 제한된 정식들에 대하여 적용함으로써 얻어질 수 있다. 이렇게 얻어진 부분 체계들 중에서 가장 약한 체계는 RCA_0로 불리는 체계로서, 산술의 기본 공리들을 2계 산술의 언어에 대하여 적용하여 얻어진 공리와 귀납 공리를 L_1의 Σ^0_1 정식에 대해 제한한 공리, 즉 Σ^0_1- IA, 그리고 다음과 같이 CA를 제한한 회귀적 포함 공

리(Recursive Comprehension Axiom)

R C A

$$(\forall x)(\varphi(x)\leftrightarrow\psi(x))\rightarrow(\exists X)(\forall x)(x\in X\leftrightarrow\varphi(x)),\ \varphi\in\Sigma^0_1,\ \psi\in\Pi^0_1$$

로 이루어진다. **여타의** 2**계 산술의 부분 체계들은** RCA_0**를 포함하는 체계로서 얻어질 수 있다**. **예를 들어** WKL_0**라는** 2**계 산술의 부분 체계는** RCA_0**의 모든 공리들에 다음과 같이 표현될 수 있는** Weak König Lemma, **즉** "**임의의** 2**원적 무한 가지 나무는 무한 통로를 갖는다**"(any binary branching infinite tree must contain some infinite path)**는 공리**

WKL. $(\forall X)(\mathrm{BinTree}(X)\wedge\mathrm{Inf}(X)\rightarrow(\exists Y)(\mathrm{Path}(Y,X)))$

로 이루어진다.

이와 같은 산술의 체계들 사이의 관계에 대하여 논의하기 위해 ***어떠한 체계*** *T1****이 또 다른 체계*** *T2****에 대하여 정식들의 집합*** Φ***에 관한 한 보존적***(conservative)**이라는 것을 다음과 같이 정의할 수 있다**:

T_1 is conservative over T_2 for Φ iff
$\phi\in\Phi$ and $T_1\vdash\phi$ implies $T_2\vdash\phi$.

이러한 경우, **다음과 같은 관계가 성립되게 된다**.

If T_2 is consistent, then T_1 is consistent.

3. 힐버트의 계획의 부분적 실현과 역수학 계획.

힐버트의 계획을 역수학 계획과 연관시키기 위하여 심슨은 먼저 힐버트의 "무한에 관하여"라는 논문에서 제시되고 있는 힐버트의 계획을 바탕으로 한 '형식화된 힐버트의 계획'(formalized Hilbert's Program)을 구성하였다.(Simpson 1988, 350~352쪽) 심슨은 힐버트가 수학에 대한 공격, 특히 칸토르의 집합론을 도입한 현대 수학에 대한 회의론자들의 비판으로부터 수학을 보호하고자 하였고, 이를 위하여 수학에 있어서의 무한의 사용을 정당화하는 계획을 추진하였다고 보았다.[6)]

이러한 힐버트의 계획을 심슨은 세 단계로 나누고, 그에 따라 형식화된 힐버트의 계획을 정의하였다. 첫 번째는 수학에 있어 문제가 없는 유한 수학의 부분을 확정하는 것으로서, 심슨은 그의 "목적을 위하여"(Simpson 1988, 352쪽) 즉 힐버트의 계획을 형식화하고, 그에 의거하여 역수학의 계획과의 관계를 설정하기 의하여, 테이트(Tait 1981)의 주장에 동조하여 힐버트의 유한 수학 또는 유한 주의가 PRA 라는 형식 체계와 동일한 것이라고 하였다.

힐버트의 계획의 두 번 째 단계는, 무한 수학을 하나의 형식 체계로 형식화함으로써 그 자체로서는 의미 없는 기호들의 나열이지만, 유한하게 취급되어 질 수 있도록 하는 것으로서, 심슨은 이렇게 형식화된 형식 체계를 2계 산술, 즉 Z_2로 규정하였다.

---

6) 이와 같은 심슨의 해석은 힐버트의 계획이 소위 수학 기초론의 위기를 해소하기 위하여 제안된 것으로 보는 입장이다. 이러한 입장은 힐버트의 계획에 대한 최근의 역사적, 철학적 연구 등에서 비판되고 있다. Alejandro Garciadiego(Garciadiego 1990), Marcus Giaquinto(Giaquinto 1983), Volker Peckhaus(Peckhaus 1994) 등의 논의를 참조할 것.

마지막으로, 힐버트의 계획의 세 번째 단계는 위의 두 번째 단계에서 설정한 무한 수학의 형식 체계가 무모순하다는 것을 첫 번째 단계에서 설정한 유한 수학에 의하여 증명하는 것으로서, 심슨은 이것을 형식 체계 Z_2의 무모순성을 형식 체계 PRA 내에서 증명하는 것으로 여겼다. 더 나아가 심슨은 이러한 증명이 가능하다면, Z_2에서 증명 가능한 모든 Π^0_1 문장들이 PRA 에서도 증명 가능하다는 점에 착안하여, 형식화된 힐버트의 계획을 다음과 같은 정리를 PRA 내에서 증명하는 것으로 규정하였다:

Z_2 가 모든 Π^0_1 문장에 관한 한 PRA에 대해 보존적이다.7)

심슨이 지적했듯이 위의 정리는 괴델의 불완전성 정리에 의하여 반박되게 된다. 왜냐하면, 괴델의 불완전성 정리에 의하여 Z_2 에서는 증명될 수 있지만, PRA 에서는 증명될 수 없는 Π^0_1 문장들, 예를 들어 1계 산술 PA 의 무모순성을 표현하는 문장이 있기 때문이다.

그러나 Z_2 대신에 Z_2의 부분 체계들에 대하여 위의 정리를 증명하고자 한다면, 위의 정리는 '부분적으로' 실현될 수 있게 된다. 프리드만에 의하여 발견된 2계 산술의 부분 체계인 WKL_0 에 있어서의 역수학 현상과 프리드만, 시에그(Wilfried Sieg), 파슨스(Charles Parsons), 민츠(G. Minc), 헤링턴(Leo Harrington) 등의 연구 결과의 종합에 의하여 이와 같은 주장이 가능하게 된다.

---

7) Simpson 1988, 352쪽 : "Z_2 is conservative over PRA with respect to Π^0_1 sentences."

먼저 WKL_0에 있어서 다음과 같은 역수학 현상이 있다는 것이 프리드만과 심슨에 의하여 증명되었다8) :

정 리 (Friedman-Simpson) :다음은 RCA_0 위에서 서로 동치이다.

(1) WKL_0
(2) Heine-Borel Theorem : Every covering of [0, 1] by a countable sequence of open intervals has a finite subcoverings.
(3) Every continuous function on [0, 1] is uniformlycontinuous.
(4) Every continuous function on [0, 1] is bounded.
(5) Every continuous function on [0, 1] has a supremum.
(6) The local existence theorem for solutions of ordinary differential equations.
(7) Every countable commutative ring has a prime ideal.
(8) Every countable formally real field can be ordered.
(9) Every countable formally real field has a real closure.
(10) Gödel's completeness theorem for predicate calculus.

위의 정리는 WKL_0 내에서 무한 수학의 많은 부분이 증명될 수 있음을 보여 주는 것으로서, 비록 모든 무한 수학을 포함하지는 않더라도 수학적으로 흥미 있는 2계 산술의 부분 체계가 가능하다고 할 수 있게 된다.9)

더욱이 프리드만은 1977년 커비(L. Kirby)와 파리스(J. Paris)의

---

8) 역수학 현상에 대한 체계적인 연구 결과는 S. Simpson에 의하여 출판될 예정인 *Subsystems of Second Order Arithmetic*(Simpson 199?)을 참조할 것. 다음의 역수학 현상은 Simpson 1985, 468~469쪽에서 인용하였음.

9) WKL_0에서 증명될 수 없는 무한 수학의 정리의 예로는 “Bolzano-Weierstrass Theorem: Every bounded sequence of real numbers has a convergent subsequence”` 가 있다. 실제로 Bolzano-Weierstrass Theorem은 WKL_0에 Arithmetical Comprehension Axiom을 더한 체계인 ACA_0와 동치인 것이 증명되었다.

결과(Kirby-Paris 1977)가 " WLK_0가 Π^0_2 문장에 관한 한 PRA에 대해 보존적이다"[10]이라는 것을 모델 이론적으로 증명한 것임을 발견하였다. 이것은 곧 WLK_0가 Π^0_1 문장에 관한 한 PRA에 대해 보존적이라는 것이고, WKL_0에 대한 역수학의 결과와 함께 '부분적인' 무한 수학이 유한 수학으로 환원될 수 있다는 것을 의미하는 것이다. 그 이후 시에그(Sieg 1985)는 위의 결과를 PRA 내에서 증명 이론적으로 증명하였다. 이러한 결과를 심슨은 다음과 같이 정리하였다:

> WKL_0 내에서 증명되어질 수 있는 모든 수학적 정리들은 힐버트의 계획의 의미로서 유한하게 환원되어 질 수 있다.[11]

위와 같은 결론에 따라 심슨은 "힐버트의 계획의 중요한 부분적 실현의 가능성"[12]이 입증되었다고 보았다.

4. 인식론적 계획으로서의 힐버트의 계획

힐버트의 계획은 역사적으로 힐버트의 수학적, 철학적 발전에 따라 형성된 '진화적인 계획'(evolutionary program)으로서, 수학적인 측면 뿐 아니라, 철학적 측면을 지니고 있다. 이와 같은 점은

---

10) Simpson 1988, 353쪽 : "WKL_0 is conservative over PRA with respect to Π^0_2 sentences."

11) Simpson 1988, 354쪽. : "Any mathematical theorem which can be proved in WKL_0 is finitistically reducible in the sense of Hilber's program."

12) Simpson 1988, 349쪽: "the feasibility of a significant *partial* realization of Hilbert's program".

힐버트 자신에 의하여 강조되었다. 그는 1927년 함부르크에서 행한 강연인 "수학의 기초"(Hilbert 1927)에서 브로워(L. E. J. Brouwer)의 직관주의를 반박하면서, 다음과 같이 선언하였다:

> 브로워가 그렇게도 비난하는 정식의 게임은 수학적인 가치뿐만 아니라, 중요한 보편적인 철학적 의미를 지니고 있다. 왜냐하면 이 정식의 게임은 어떠한 일정한 규칙들에 의하여 진행되는 것으로서, 그러한 규칙들에 우리의 생각의 기술들이 표현되어 있다. . . . 나의 증명 이론의 근본적 개념은 우리의 오성의 활동을 기술하고, 우리의 생각이 실제로 따르는 규칙들의 규약을 만들자는 것에 다름이 아니다.[13]

이와 같은 힐버트의 계획의 철학적 측면의 기원에 대하여, 페크하우스(Volker Peckhaus)는 그의 "힐버트의 공리론적 계획과 철학"(Peckhaus 1994)이라는 논문에서, 힐버트가 1900년대 초기에 '공리 체계화의 철학적 기초'를 체계적으로 탐구하는 데 관심을 지닌 데에서부터 찾아보고자 하였다.[14] 그는 1900년과 1904년 사이에 힐버트가 수학의 기초의 탐구는 "수학적인 측면 뿐 아니라, 철학적인 측면"(Peckhaus 1994, 95쪽)이 요구된다는 확신을 지니

---

13) Hilbert 1927, 475쪽 : "The formula game that Brouwer so deprecates has, besides its mathematical value, an important general philosophical significance. For this formula game is carried out according to certain definite rules, in which the technique of our thinking is expressed. . . . The fundamental idea of my proof theory is none other than to describe the activity of our understanding, to make a protocol of the rules according to which our thinking actually proceeds."

14) "Hilbert의 기하학의 공리화는 비판적 수학의 *수학적* 부분의 모델로서의 역할을 하는 것으로서, 연이은 *철학적* 노력에 의하여 제공되는 '철학적 기초'에 의하여 보충되게 된다."(Hilbert's axiomatization of geometry served as a model for the *mathematical* part of critical mathematics, which was to be supplemented, so to speak, with a 'philosophical fundament' provided by subsequent *philosophical* efforts. p. 100, in Peckhaus 1994)

게 되었다고 보았다. 즉, 그는 이러한 힐버트의 확신과 철학적 전향이 1903년의 러셀에 의한 집합론적 역설의 발견에 의하여 촉발되었고, 그에 따라 힐버트가 집합론과 논리학을 무모순하게 공리화하려는 계획을 세우게 되었다는 것이다.

그러나, 이와 같은 페크하우스의 입장은 힐버트가 수학의 기초를 공고히 하고자 하려는 시도를 러셀의 집합론적 모순의 발견 이전에 - 이미 집합론적 모순을 알고 있었음에도 불구하고 - 시도하였다는 역사적 사실을 설명하기 어렵다.15) 힐버트의 계획이 지니는 "철학적 의미"는 오히려 힐버트의 수학에 대한 철학적 견해 또는 신념으로부터 찾아져야 한다. 이러한 힐버트의 수학에 대한 철학적 견해가 최초로 명확히 나타난 것은 그가 1900년 파리에서 행한 "수학적 문제들"(Hilbert 1900)이라는 강연이었다.

이 강연에서 힐버트는 수학의 진보를 위한 수학적 문제들의 해결을 위한 조건으로서 "유한한 가정에 입각하여 유한한 단계를 거쳐 해답을 얻을 것"을 요구하고, 이러한 요구가 "사유에 있어서의 엄밀성"의 요구로서 우리의 오성을 위해 "철학적으로 필수적인 것"이라고 하였다. 이와 같은 힐버트의 입장은 모든 수학적 문제들의 해결이 가능하다는 공리에 대한 믿음 즉, "수학에는 무지가 없다"16)는 인식론적 믿음을 반영하는 것이었다.

이와 같은 관점에서 볼 때, 힐버트는 인식론적인 관심을 지니

---

15) A. Garciadiego(Garciadiego 1990, 248쪽) : "by 1891, some years before Hilbert had any knowledge either of the set theoretic paradoxes or the resulting crises concerning the foundations of mathematics, he already had in mind some of the elements that would later constitute his formalist program."

16) Hilbert 1900, 7쪽 : "in mathematics there is no *ignorabimus*." 힐버트는 그가 30년 후에 마지막으로 행한 강연(Hilbert 1930)의 마지막에도 "ignorabismus [We will never know]"를 거부하고, "우리는 알아야 한다, 우리는 알 것이다"(We must know, we will know)라고 주장하였다.

고 그의 계획을 추진하였다고 할 수 있고, 그런 의미에서 힐버트의 계획은 철학적으로 인식론적 계획이라고 여길 수 있다.

5. 힐버트의 실증주의적 수리 철학

심슨은 힐버트의 계획에 있어 힐버트의 '유한 주의'를 테이트와 마찬가지로 수학적으로 해석하였다. 즉, 그는 "힐버트의 유한주의는 원시적 회귀 산술인 *PRA* 의 형식 체계에 의하여 포착될 수 있다"는 테이트의 주장이 올바르다고 보았다.17)

하지만, 힐버트의 유한 주의는 힐버트의 수리 철학에 바탕을 둔 철학적 입장으로서, 어떠한 수학의 형식 체계와 동일시될 수 있는 것이 아니다. 이와 같은 점은 최근 마예어(Ulrich Majer)의 "서로 다른 유한주의의 형식들"(Majer 1993)이라는 논문에서 강조되었다. 그는 힐버트의 유한 주의가 원시적 회귀 산술과 같은 것이라는 견해를 받아들이지 않는다18)고 하면서, 그 이유로서 다음과 같은 세 가지를 제시하였다:

> I) 그 어디에서도 힐버트가 유한 수학이 PRA로 제한되거나 같다고 하는 말을 하지 않는다. 그 대신 그는 유한 주의를 '유한-무한'의 대립과 칸트적인 '직관'에 의하여 설명하고 있다.
> II) 힐버트에게 있어 무한은 실무한과 가무한 모두를 포함 하는

---

17) Simpson 1988, 352쪽: "Hilbert's finitism is captured by the formal system PRA of primitive recursive arithmetic (also know as Skolem arithmetic). . . . I am going to accept Tait's identification of finitism with PRA."

18) Majer 1993, 185쪽: "I do not agree with the generally accepted view that Hilbert's finitism is identical or equivalent with primitive recursive arithmetic [p.r.a.] as Tait proposed."

것으로서, 그가 유한에 의하여 의미한 것은 무한 이 아닌 것으로서, 가무한도 제외되게 된다.

III) 힐버트의 "유한 주의자의 관점"은 수학이나 메타 수학에 제한된 것이 아니라, 인식론의 보편적 원리(a universal principle of epistemology)로서 서술되었다. 따라서, 그것은 원시적 회귀 산술이나 가무한과 같은 수학적(mathematical) 수단들에 의하여 완전하게 포착될 수 있는 것이 아니다.

이에 따라 마예어는 힐버트의 유한 주의를 "우리의 모든 사유의 기초"가 "구체적 대상들의 직관"이라는 인식론적, 철학적 입장이라고 보았다. 이와 같은 힐버트의 철학적 입장은 힐버트가 "유한 주의자의 마음 구조"(the finitist frame of mind)라고 하는 것을 "구체적인 내용에 대한 관심"(a concern for concrete content) 이라고 하면서, 다음과 같이 그의 "기본적인 철학적 입장"을 이야기하는 데에서 나타나고 있다:

> 논리적 추론의 사용과 논리적 연산의 수행을 위한 조건으로서 우리의 표상 능력 안에 이미 어떤 것이, 직관적으로 모든 사유에 앞서 직접적인 경험으로서 어떠한 논리 외적인 구체적 대상들이 있어야 한다. 논리적 추론이 신뢰될 수 있을 만 하려면 이러한 대상들을 그 모든 부분에 걸쳐 조망될 수 있어 야 하고, 그들이 생겨나고, 그들이 서로 다르며, 그들이 각기 따르거나 뭉쳐진다는 사실이 그 대상들이 그 어떤 것으로도 환원될 수 도 없고, 환원을 필요로 하지 않는다는 것과 함께 직접적으로 직관적으로 주어져야 한다. 이러한 것이 수학, 나아가 일반적으로 모든 과학적 사유, 이해, 그리고 전달을 위하여 필수적이라고 여기는 철학적인 기본 입장이다.[19]

즉, 힐버트는 구체적 대상들에 대한 직접적인 직관으로부터 수학, 나아가 모든 사유의 논리적 정당성을 찾을 수 있는 것이라고

19) Hilbert 1925, 376쪽.

본 것이다. 그가 유한적인 산술(finitary number theory)의 기본 문장들을 유한한 문장, 또는 진정한 문장(real proposition)이라고 한 것은 유한 수학 또는 유한 주의(finitism)와 유한 산술이 동일시될 수 있다는 것 때문이 아니라, 유한 산술의 진리들이 "수학적 도구의 신뢰성을 보장하는 직관들"에 의하여 얻어지기 때문이다.

이와 같이 힐버트가 구체적인 대상의 직접적인 직관에서 수학과 논리적 사유의 근거를 찾고 있다는 점은 그의 수리 철학이 지금까지 일반적으로 알려져 왔듯이 단순히 '형식주의'라고 부를 수 있는 것이 아님을 시사한다. 이와 관련하여, 힐버트의 수리 철학에 대한 역사적 연구에서 지아퀸토(Marcus Giaquinto)가 힐버트의 계획이 20세기초의 "경험주의에로의 복귀"(a return to empiricism)라는 시대에 이루어지게 된 것이라고 지적한 것을 주목할 필요가 있다. 그는 "힐버트의 수리 철학"(Giaquinto 1983)이라는 논문에서 오늘날의 우리들이 힐버트가 지니고 있었던 그의 계획의 목적들의 수행에 대한 확신을 이해하지 못하는 이유는 "우리가 2차 세계 대전 전에 성행하였던 경험주의(특히, 실증주의)에 대하여 일반적으로 적대적인 철학적 환경에 있다"[20)]는 사실 때문이라고 진단하면서, 힐버트의 수리 철학에 대한 역사적 이해를 강조하였다. 이러한 입장에 따르면, 힐버트가 그의 계획에 있어 '유한 주의', 또는 '유한 주의자의 마음 구조'가 "경험주의"(empiricism), 즉, "유일한 사실들은 관측 가능한 사실들이다"(the only facts are observable facts)라는 철학적 견해에서부터

---

20) Giaquinto 1983, 127쪽: "If we find it difficult to understand why, before Gödel's results, Hilbert seemed to entertain no doubts about the possibility of achieving his programmatic objectives, it may be because we find ourselves in a philosophical climate generally hostile to the empiricism (specifically, positivism) which flourished before the Second World War."

생겨난 것이라 하겠다. 또한, 이러한 해석은 힐버트의 계획이 '관측될 수 없고, 경험될 수 될 수 없는 것'으로서의 '이상적 명제들'(ideal propositions)로 이루어진 '무한 수학'을 '직접적으로 관측될 수 있고, 검증될 수 있는' '실재적 명제들'(real propositions)로 이루어진 '유한 수학'으로 환원하려는 환원주의적 계획(reductionistic program)임을 보여 주게 된다.

6. 맺는 말

힐버트의 계획이 괴델의 불완전성 정리에 의하여 완전히 반박되게 되었다는 일반적인 인식에도 불구하고, 많은 철학자들과 수학자들이 여전히 힐버트의 계획에 관심을 지니고 논의하는 기본적인 이유는 그 계획의 방향아래 이루어지고, 또 이루어지고 있는 많은 수학적, 논리적 결과들 때문이라 할 수 있다. 하지만, 지금까지의 우리의 논의는 힐버트의 계획이 그러한 수학적인 측면에서만 중요한 것이 아니라, 철학적으로 중요하게 논의할 측면이 있음을 보여준다. 특히 괴델의 불완전성 정리가 과연 힐버트의 계획을 반박한 것이냐를 논의하는 것도 수학적인 측면에서뿐만 아니라, 철학적인 측면에서 가능하고 필요한 것임을 말할 수 있다. 또한, 비트겐슈타인이 그의 유고들에서 논의하고 있는 힐버트의 계획과 괴델의 정리에 대한 견해가 철학적으로 논의될 근거가 있음을 보여 주는 것이기도 하다.

참고문헌

Solomon Feferman, “Hilbert's program relativized: proof-theoretical and foundational reductions”, p.364~p.384, in *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 53, 1988.

Solomon Feferman, “What rests on what? The proof-theoretic analysis of mathematics”, p.147~p.171, in *Proceedings of the 15th International Wittgenstein-Symposium*, 1993.

Harvey Friedman, “Some systems of second order arithmetic and their use”, p.235~p.242, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1975.

Alejandro Garciadiego, “The set-theoretic paradoxes: their influence at the turn of the century”, p.245~p.250, in *Structures in Mathematical Theories*, ed. by A.Ibarra et al., 1990.

Marcus Giaquinto, “Hilbert's philosophy of mathematics”, p.119~p.132, in *British Journal for Philosophy of Science*, Vol. 34, 1983.

David Hilbert, “Mathematical Problems”, p.1~p. 4, in *Mathematical Developments Arising From Hilbert Problems*, ed. by Felix E. Browder, 1976.

David Hilbert, “On the infinite”, p.367~p.392, in *From Frege To Gödel*, ed. by J. van Heijenoort, 1925.

David Hilbert, “The foundation of mathematics”, p.464~p.479, in *From Frege To Gödel*, ed. by J. van Heijenoort, 1927.

David Hilbert, “Naturerkennen und logik”, p.378~p.387, in *David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen **III***, 1930.

David Hilbert and Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik, I, **II***, 1934, 1939.

Ulrich Majer, “Different forms of finitism”, p.185~p.194, *Proceedings of the 15th International Wittgenstein-Symposium*, 1993.

Roman Murawski, “On the philosophical meaning of reverse mathematics", p.173~p.184, in *Proceedings of the 15th International Wittgenstein-Symposium*, 1993.

Roman Murawski, "Hilbert's program: incompleteness theorems vs. partial realizations", p.103~p.127, in *Philosophical Logic in Poland*, ed. by J. Wolenski, 1994.

Volker Peckhaus, "Hilbert's axiomatic programme and philosophy", p.91~p.112, in *The History of Modern Mathematics*, Vol. Ⅲ, ed. by E. Knobloch and D. Rowe, 1994.

Stephen G. Simpson, "Reverse mathematics", p.461~p.471, in *Proceedings of the Recursion Theory Summer School*, 1985.

Stephen G. Simpson, "Subsystems of Z_2 and reverse mathematics", p.432~p.446, in *Proof Theory* by G. Takeuti, 1987.

Stephen G. Simpson, "Partial realizations of Hilbert's program", p.349~p.363, in *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 53, 1988.

William Tait, "Finitism", p.524~p.546, in *Journal of Philosophy*, Vol. 78, 1981.