Journal of Statistical
Theory & Methods
1996. Vol. 7, pp 211~217

확률밀도함수의 미분에 대한 커널추정법에 관한 연구

석경하 · 김대학

요약. 본 논문은 확률밀도함수의 l 번째 도함수의 커널추정법에 관하여 다루고 있다. 확률밀도함수 도함수의 커널추정에 사용될 수 있는 두가지 평활량의 선택법, 교차타당성방법과 삽입방법에 의한 평활량의 점근분포를 규명하고 이들의 상대적 수렴속도를 각각 밝히고 삽입방법의 우수성을 소표본 모의실험을 통하여 확인하였다.

주제어: 확률밀도함수, 도함수, 커널추정, 평활계수, 교차타당성, 삽입방법

1. 서론

확률 밀도함수의 커널 추정법은 주어진 자료의 분포를 이해하고 설명하는데 많이 사용되고 있다. 이 분야에 관한 많은 예와 함께 비교적 이해가 쉽게 쓰여진 대표적인 참고서로는 Silverman(1986)등이 있다. 커널추정에 있어서 주된 두가지 중요한 요소는 추정된 함수의 부드러운 정도를 결정하여 주는 평활계수(smoothing parameter)의 추정량인 평활량과 국소적 형태를 결정하는 커널함수의 선택이다. 이 두 가지 중에서 평활량의 선택이 추정량의 효율에 더욱 더 많은 영향을 미친다는 것은 여러연구에서 밝혀진 바 있다. 또한 평활량의 선택 문제에서, 너무 작은 평활량이 선택된다면 이에 대응된 확률밀도함수 추정량은 표본 변동에 많은 영향을 받게 될 것이고, 이에 반해서 너무 큰 평활량이 선택된다면 아주 큰 편의를 가지게 될 것이다.

평활량의 선택에 관한 많은 연구가 이루어 졌고 현재에도 활발한 연구가 진행중이다. 여러가지의 선택방법 중에서 대표적으로 사용되고 있는 방법으로는 Rudemo(1982), Bowman(1984) 그리고 Scott 와 Terrell(1984) 등에 의한 교차타당성(cross-validation)방법과 Park 과 Marron(1990), Hall 등(1991), Sheather 와 Jones(1991) 등에 의한 삽입(plug-in)방법을 들 수 있다. 이 중에서 삽입방법이 유용하게 사용되어 지고 있는데, 이는 최근에 개발된 점근 최적수렴율을 가지는 여러가지 방법에 비하여 효율성이 크게 떨어지지 않는 것으로 평가되어진다.

확률밀도함수의 도함수(density derivatives)는 최빈치(mode)와 변곡점(inflection point)의 계산에 이용될 뿐 아니라 Hardle 과 Stocker(1989)가 언급 했듯이 가법모형(additive model)에 점수(score)를 추정하는데 있어서도 아주 중요한 역할을 한다. 이상의 실용적인 중요성이외에도 이론적인 측면, 예를 들면 확률밀도함수의 추정에서 오차기준(error criteria)에 직 · 간접적으로 확률밀도함수의 도함수가 나타나는 것 등에서도 중요하다.

이와 같이 통계적으로 중요한 의미를 가지는 확률밀도함수의 도함수 추정에 커널밀도함수 추정법을 확장, 응용하고자 함이 본 연구의 목적이다. Hardle 등(1990)은 교차타당성 방법을

이 논문은 1995년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.
석경하는 인제대학교 통계학과(621-749, 경남 김해시 어방동) 교수이며, 김대학은 대구효성가톨릭대학교 통계학과(712-702, 경북 경산시 하양읍) 교수이다.

도함수의 추정에 응용하였다. 그리고 이 방법에 의한 평활량과 도함수의 추정량이 일치추정량이라는 것을 증명하였고 소표본 모의실험을 통하여 이 방법이 효율적이라는 것을 보여 주었다.

제 2절에서는 l 번째 도함수를 추정할 때 교차타당성 방법에 의해 선택된 평활량의 점근분포를 규명하였다. 그리고 확률밀도함수의 커널추정에서 만족스럽게 사용되어지고 있는 Sheather 와 Jones(1991), Song 등(1991)의 삽입방법을 확장하여 도함수의 추정에 응용하였다. 물론 이 방법에 의해 선택된 평활량의 여러 가지 통계적인 성질과 점근분포를 밝혔다. 그리고 삽입방법이 더 우수하다는 이론적인 결과를 뒷받침하는 모의실험결과는 제3절에 나타나있다.

2. 확률밀도함수 도함수의 커널 추정

확률밀도함수 f를 따르는 크기가 n인 랜덤표본을 $X_1,\cdots,X_n$이라 할 때 f의 커널추정량은

$$\hat{f}_h(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - X_i) \tag{1}$$

이다. 여기에서 $K_h(x) = K(x/h)/h$로서 K는 커널함수이고 h는 평활계수이다. 이 커널추정량을 이용한 f의 l 번째 도함수 $f^{(l)}(x)$의 커널추정량은

$$\hat{f}_h^{(l)}(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h^{(l)}(x - X_i) \tag{2}$$

로 주어진다. 본 논문에서 다루게 될 여러 가지 이론적인 결과의 정리를 위하여 커널함수 K와 밀도함수 f가 일반성을 잃지 않고 다음과 같은 조건들을 만족한다고 가정하자.

조건1. f는 $k+2$번 미분가능하고 $R(f^{(l+2)})<\infty$, 그리고 $\int ff^{(2l)}f^{(2l+4)}<\infty$ 이다.

조건2. K는 $i=1,\cdots,2l+1$에 대해서 $K^{(i)}(\pm\infty)=0$를 만족하는 대칭인 확률밀도함수이다.

이때 범함수 R은 임의의 함수 g에 대하여 $R(g)=\int g^2(x)dx$ 이다.

2.1 삽입방법

일반적으로 추정량의 수행정도를 측정하는 오차기준으로서 많이 사용되고 있는 평균누적제곱오차($MISE$, Mean Integrated Squared Error)는

$$\begin{aligned} MISE_l(h) &= E\int(\hat{f}_h^{(l)} - f^{(l)})^2 \\ &= n^{-1}h^{-2l-1}R(K^{(l)} + (-1)^l n^{-1}(n-1)h^{-2l}\int\left\{f\_*f(z)\right\}\left\{K_h^{(l)} * K_h^{(l)}(z)\right\}dz \\ &\quad -2h^{-l}\int\left\{f\_*f(z)\right\}K_h^{(l)}dz + f\_*f(0) \end{aligned} \tag{3}$$

이다. 여기에서 *는 함수의 합성(convolution)을 나타내고 $f_(x)=f(-x)$를 의미한다. 평균누적제곱오차의 점근적 표현($AMISE$, Asymptotic MISE)은

$$AMISE_l(h) = \mu_2^2h^4R(f^{(l+2)}) + n^{-1}h^{-2l-1}R(K^{(l)}) \tag{4}$$

이다. 여기에서 $\mu_2^2 = \int x^2K(x)dx$ 이다.(3)식과 (4)식을 최소화하는 h를 각각 h_0^l, h_A^l라 두면

$$h_A^l = \left\{ \frac{(2l+1)R(K^{(l)})}{R(f^{(l+2)})\mu_2^2 n} \right\}^{1/2l+5} \tag{5}$$

가 됨을 알 수 있다. (5)식에서 모르는 부분인 $R(f^{(l+2)})$에 적당한 추정량을 대입한 것이 삽입 평활량 h_{PI}^l이다. Sheather 와 Jones(1991), Song등(1991)의 연구에 의한 추정량

$$\hat{R}_a(f^{(l+2)}) = n^{-1}a^{-2l-5}R(U^{(l+2)}) + (-1)^l n^{-1}(n-1)^{-1}\sum_{i \neq j}\sum U_a^{(l+2)} * U_a^{(l+2)}(X_i - X_j) \tag{6}$$

을 이용하여 삽입하는 방법을 고려하자. 여기에서 a와 U는 $R(f^{(l+2)})$의 추정에 이용되는 평활량과 커널함수인데 커널함수 U가 다음조건을 만족한다고 가정하자.

조건3. U는 $i=1,\cdots,2l+4$ 일때 $U^{(i)}(\pm\infty)=0$이고 $2l+4$번 미분가능한 대칭인 밀도함수이다.

$\hat{R}_a(f^{(l+2)})$를 (5)식에 대입하여 h_{PI}^l을 추정하려면 평활계수 a를 추정하여야 할 것이다. 물론 $MSE\left\{\hat{R}_a(f^{(l+2)})\right\}$를 최소화하는 a는

$$\hat{a} = \left\{ \frac{R(U^{(l+2)})}{nR(f^{(l+3)})\tau_2} \right\} \tag{7}$$

이고 $\tau_2 = \int x^2 U(x)dx$ 이다. 이때 $\hat{R}_{\hat{a}}(f^{(l+2)})$의 분포는

$$\hat{R}_{\hat{a}}(f^{(l+2)}) \sim AN\left(R(f^{(l+2)}), \sigma_1^2 n^{-\frac{5}{2l+7}} \right) \tag{8}$$

이고 여기에서

$$\sigma_1^2 = 2R(f)R(U^{(l+2)} * U^{(l+2)})\left\{R(f^{(l+3)}\tau_2 / R(U^{(l+2)})\right\}^{4l+9/2l+7}$$

이다.(7)식의 $\hat{a}$를 이용하여 만든 추정량 $\hat{R}_{\hat{a}}(f^{(l+2)})$를 (5)식에 대입한 평활량 h_{PI}^l의 점근분포는

$$(\hat{h}_{PI}^l - h_0^l)/h_0^l \sim AN(0,(2l+5)^{\frac{4l+8}{2l+5}}\sigma_1^2 R(f^{(l+2)})^{-2} n^{-\frac{5}{(2l+7)}}) \tag{9}$$

이 된다. 위의 사실로부터 h_{PI}^l의 상대적 수렴율(relative convergence rate)이 $n^{-5/2(2l+7)}$이 됨을 알 수 있다.

참고 1. $\hat{a}$가 미지인 $R(f^{(l+3)})$을 포함하고 있기 때문에 실제 자료에서 h_{PI}^l를 바로 사용할 수가 없다. 그러나 이러한 문제점은 Park 과 Marron(1990)에서 언급한 것처럼 $R(f^{(l+3)})$를 $R(g_1^{(l+3)})/\hat{\lambda}^{2l+7}$로 대치시키면 해결된다. 여기에서 g_1은 단위척도를 가지는 적당한 밀도함수이고 $\hat{\lambda}$는 척도모수의 추정량이다. 이렇게 대치를 하여도 삽입방법의 상대적 수렴율은 $n^{-5/2(2l+7)}$로 변화가 없다.

2.2 교차타당성 방법

밀도함수 추정에 있어서 교차타당성 함수는

$$CV(h) = \int \hat{f}_h^2(x)dx - 2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_{h,i}(X_i) \tag{10}$$

이다. 여기에서 $\hat{f}_{h,i}(x)=(n-1)^{-1}\sum_{j\neq i}^{n}K_h(x-X_j)$이다. (10)식의 교차타당성 함수를 l 번째 도함수의 추정에 확장을 하면

$$CV_l(h)=\int\hat{f}_h^{(l)}(x)^2\,dx-2(-1)^l n^{-1}\sum\hat{f}_{h,i}^{(2l)}(X_i) \tag{11}$$

가 된다. 여기에서 $\hat{f}_{h,i}^{(2l)}(x)=(n-1)^{-1}\sum K_h^{(2l)}(x-X_j)$이다. (11)식을 계산하기 쉬운 형태로 쓰면

$$CV_l(h)=n^{-1}h^{-2l-1}R(K^{(l)})+2(-1)^l n^{-1}h^{-2l-1}\left[n^{-1}\sum_i\sum_{<j}(K*K)^{(2l)}\left(\tfrac{X_i-X_j}{h}\right)\right.$$
$$\left.-2(n-1)^{-1}K^{(2l)}\left(\tfrac{X_i-X_j}{h}\right)\right] \tag{12}$$

로 표현할 수 있다. $CV_l(h)$를 최소화하는 $\hat{h}_{CV}^l$의 점근분포를 아래의 정리에서 밝혔다.

정리 1. 조건 1,2 를 가정하면

$$(\hat{h}_{CV}^l-h_0^l)/h_0^l\sim AN(0,\sigma_2^2),$$

이때

$$\sigma_2^2=2(2l+5)^{-2}R((2l+1)A_l+B_l)R(f)\left\{(2l+1)R(K^{(l)})\right\}^{-\frac{4l+9}{2l+5}}\left\{R(f^{(l+3)})\mu_2^2 n\right\}^{-\frac{1}{(2l+5)}}$$

이다.

증명. (12) 식의 $CV_l(h)$을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$CV_l(h)=n^{-1}h^{-2l-1}R(K^{(l)})+2(-1)^l n^{-2}h^{-2l-1}\left\{\sum_i\sum_{<j}A_l(c_{ij})\right\}$$

이때 $A_l(c)=(K*K)^{(2l)}(c)-2K^{(2l)}(c)$이다. 그러므로

$$\frac{d}{dh}CV_l(h)=-\frac{1}{n^2h^{2l+2}}\left[n(2l+1)R(K^{(l)})+(-1)^l 2\sum_i\sum_{<j}\left\{(2l+1)A_l(c_{ij})+B_l(c_{ij})\right\}\right]$$

이다. 이때 $B_l(c)=c(K*K)^{(2l+1)}(c)-2cK^{(2l+1)}(c)$이다. 그래서

$$\sum_i\sum_{<j}\left\{(2l+1)A_l(c_{ij})+B_l(c_{ij})\right\}\Big|_{h=\hat{h}_{CV}}=(-1)^{l+1}(2l+1)nR(K^{(l)})$$

가 된다. 또한

$$E\left\{A_l(c_{ij})\right\}=(-1)^l h^{2l+1}\left\{-R(f^{(l)})+h^4\mu_2^2R(f^{(l+2)})/4\right\}$$
$$E\left\{B_l(c_{ij})\right\}=(-1)^l(2l+1)h^{2l+1}R(f^{(l)})+(-1)^{l+1}(2l+5)h^{2l+5}R(f^{(l+2)})\mu_2^2/4$$
$$\int A_l\left(\tfrac{x-y}{h}\right)f(y)dy=-h^{2l+1}f^{(2l)}(x)+h^{2l+5}\mu_2^2f^{(2l+4)}(x)/4$$
$$\int B_l\left(\tfrac{x-y}{h}\right)f(y)dy=(2l+1)h^{2l+1}f^{(2l)}(x)-(2l+5)h^{2l+5}\mu_2^2f^{(2l+4)}(x)/4$$

임을 이용하여, $I_1(l)=\int ff^{(2l)}f^{(2l+4)}$, $I_2(l)=R(f^{(l)})R(f^{(l+2)})$, $I_3(l)=\int f\left\{f^{(2l)}\right\}^2-R^2(f^{(l)})$ 이라 하면

$$COV\left\{A_l(c_{ij}),A_l(c_{ik})\right\}=h^{4l+2}I_3(l)-h^{4l+6}\mu_2^2\left\{I_1(l)-I_2(l)\right\}/4$$

$$COV\left\{B_l(c_{ij}),B_l(c_{ik})\right\}=(2l+1)^2h^{4l+2}I_3(l)-(2l+1)(2l+5)h^{4l+6}\mu_2^2\left\{I_1(l)-I_2(l)\right\}/2$$

$$COV\left\{A_l(c_{ij}),B_l(c_{ik})\right\}=-(2l+1)^2h^{4l+2}I_3(l)+(4l+6)h^{4l+6}\mu_2^2\left\{I_1(l)-I_2(l)\right\}/4$$

를 계산할 수 있다. 그러므로

$$E\left[\sum_{i}\sum_{<j}\left\{(2l+1)A_l(c_{ij})+B_l(c_{ij})\right\}\right]\sim(-1)^l n^2h^{2l+5}\mu_2^2R(f^{(l+2)})$$

$$VAR\left[\sum\sum\left\{(2l+1)A_l(c_{ij})+B_l(c_{ij})\right\}\right]\sim\begin{array}{l}n^2(2l+1)hR(A_l)R(f)/2+n^2hR(B_1)R(f)/2\\+n^2(2l+1)hR(f)R\left\{(A_lB_l)^{1/2}\right\}\end{array}$$

가 된다. 이 사실들로부터 증명이 이루어진다.

정리1의 내용으로부터 $\hat{h}^l_{CV}$의 상대적 수렴율이 $n^{-1/2(2l+5)}$가 됨을 알 수가 있다. 이는 $\hat{h}^l_{PI}$의 $n^{-5/2(2l+7)}$보다 수렴속도가 느리다는 것을 알 수가 있다.

3. 모의실험

이 절에서는 모의실험을 통하여 삽입방법과 교차타당성방법의 소표본에서의 수행능력을 살피고자 한다. 이 모의실험을 위하여 극단값 분포(extreme value distribution, $f(x)=e^xe^{-e^x}$)와 표준정규분포의 두가지 확률밀도함수를 사용하였다. 그리고 이 밀도함수들의 첫번째와 두번째 도함수를 추정하기 위해 교차타당성 방법과 삽입방법으로 선택된 각 평활량의 수행능력을 비교하기 위하여 표준정규분포 함수를 커널함수로 사용하였다.

표1. 극단값 분포의 일차도함수 추정에서 $\hat{h}^{(1)}_{PI}$과 $\hat{h}^{(1)}_{CV}$의 비교

n		50	100	200	400	800	1000
h_{opt}		0.501	0.454	0.414	0.373	0.337	0.327
mean of	pi	0.643 (0.083)	0.577 (0.052)	0.513 (0.035)	0.455 (0.023)	0.404 (0.015)	0.390 (0.012)
h	cv	0.675 (0.238)	0.533 (0.207)	0.500 (0.144)	0.415 (0.130)	0.357 (0.122)	0.343 (0.106)
ise of	pi	0.027	0.021	0.015	0.010	0.007	0.006
h	cv	0.077	0.266	0.044	0.048	0.058	0.031
# of $\lvert\hat{h}_{pi}-h_{opt}\rvert<\lvert\hat{h}_{cv}-h_{opt}\rvert$		77	75	70	65	73	69
# of $ise(\hat{h}_{pi})<ise(\hat{h}_{cv})$		72	66	65	62	63	58

표준정규분포를 따르는 표본은 IMSL의 서브루틴 RNNOR을 이용하여 생성하였고, 극단값 분포를 따르는 표본은 서브루틴 RNUN을 이용하여 생성된 표본을 $\log(-\log(1-x))$변환을 취하여 사용하였다. 이 실험에 사용된 표본의 크기는 10, 100, 200, 400, 800, 1000이고 반복수(r)는 100

을 사용하였다. 모든 계산은 정도를 높이기 위하여 워크스테이션에서 수행되었다.

$\hat{h}^{l}_{CV}$의 선택을 위하여 $[0.02, 1.00]$구간에서 $CV_l(h)$함수를 최소화시키는 값을 선택하였는데 이 구간에서 국소 최소값이 존재하지 않는 경우가 발생하는 문제점을 발견할 수가 있었다. 이러한 현상은 밀도함수의 추정에서는 표본의 크기가 50이상일 때는 거의 발생하지 않는 것으로 알려져 있다. 그러나 2번째 도함수의 추정에서는 표본의 크기가 아주 큰 경우에는 이러한 문제점을 안고 있는 것으로 나타났다.

표2. 극단값 분포의 이차도함수 추정에서 $\hat{h}^{(2)}_{PI}$과 $\hat{h}^{(2)}_{CV}$의 비교

n		50	100	200	400	800	1000
h_{opt}		0.469	0.434	0.402	0.372	0.344	0.336
mean of h	pi	0.707 (0.096)	0.651 (0.060)	0.595 (0.042)	0.541 (0.028)	0.491 (0.019)	0.478 (0.016)
	cv	0.769 (0.276)	0.638 (0.261)	0.604 (0.196)	0.510 (0.174)	0.448 (0.162)	0.432 (0.142)
ise of h	pi	0.124	0.103	0.084	0.068	0.052	0.048
	cv	2.572	42.26	6.858	6.670	10.724	3.965
# of $\lvert\hat{h}_{pi}-h_{opt}\rvert < \lvert\hat{h}_{cv}-h_{opt}\rvert$		89	85	86	66	74	77
# of $ise(\hat{h}_{pi}) < ise(\hat{h}_{cv})$		87	86	88	64	69	81

표3. 표준정규분포의 일차도함수 추정에서 $\hat{h}^{(1)}_{PI}$과 $\hat{h}^{(1)}_{CV}$의 비교

n		50	100	200	400	800	1000
h_{opt}		0.554	0.502	0.454	0.412	0.373	0.361
mean of h	pi	0.547 (0.067)	0.492 (0.047)	0.447 (0.032)	0.404 (0.025)	0.368 (0.019)	0.357 (0.015)
	cv	0.689 (0.224)	0.540 (0.207)	0.499 (0.156)	0.422 (0.141)	0.378 (0.131)	0.376 (0.105)
ise of h	pi	0.024	0.019	0.012	0.009	0.005	0.005
	cv	0.087	0.112	0.046	0.041	0.026	0.014
# of $\lvert\hat{h}_{pi}-h_{opt}\rvert < \lvert\hat{h}_{cv}-h_{opt}\rvert$		90	88	91	96	93	94
# of $ise(\hat{h}_{pi}) < ise(\hat{h}_{cv})$		91	96	90	97	95	90

표4. 표준정규분포의 이차도함수 추정에서 $\hat{h}^{(2)}_{PI}$과 $\hat{h}^{(2)}_{CV}$의 비교

n		50	100	200	400	800	1000
h_{opt}		0.608	0.563	0.522	0.483	0.447	0.436
mean of h	pi	0.590 (0.072)	0.543 (0.051)	0.506 (0.039)	0.468 (0.030)	0.436 (0.025)	0.426 (0.015)
	cv	0.843 (0.285)	0.656 (0.275)	0.618 (0.215)	0.539 (0.190)	0.476 (0.186)	0.482 (0.1442)
ise of h	pi	0.104	0.083	0.056	0.044	0.030	0.026
	cv	6.184	6.997	2.874	1.664	1.773	0.543
# of $\lvert\hat{h}_{pi}-h_{opt}\rvert < \lvert\hat{h}_{cv}-h_{opt}\rvert$		78	83	76	82	81	94
# of $ise(\hat{h}_{pi}) < ise(\hat{h}_{cv})$		71	84	75	83	84	90

두 방법의 비교를 위하여 100번의 반복을 통한 평활량의 평균(mean of $\hat{h}$),표준편차 (s.d.of $\hat{h}$), $MISE_l$의 추정치 그리고 100개의 표본 중에서 $ISE_l(\hat{h}_n^l)$가 보다 적은 표본수를 표1부터 표4에 나타내었다. 여기서 $MISE_l$의 추정치란 다음식을 의미한다.

$$M\hat{I}SE_l(\hat{h}) = \sum ISE_l(\hat{h})/r \quad , \quad ISE_l(\hat{h}) = \int\left\{\hat{f}_{\hat{h}}^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)\right\}^2 dx$$

이다. 이 표들로부터 모든 경우에서 삽입방법이 교차타당성 방법보다 더 우수하다는 것을 알 수가 있다. 특히 ( )로 표기된 표준오차에서 많은 차이가 남을 알 수가 있다. ISE값의 관점에서 비교를 해보아도 100개의 표본 중에서 $ISE(\hat{h}_{Pl}^l)$값이 적게는 62번 많게는 92개의 표본에서 더 작은 값이 나왔다. 또한 $MISE_l$의 추정치를 비교해 보아도 삽입방법이 더 우수하다는 것을 알 수가 있다. 이러한 전반적인 결과는 확률밀도함수의 추정결과와 일치한다.

한가지 지적할 사항은 $MISE_l(\hat{h}_{CV}^l)$의 추정값이 두 번째 도함수추정에서 아주 크게 나오는데 (표2,표4) 이는 앞에서 지적했듯이 $CV_2(h)$함수가 주어진 구간에서 국소 최소치가 존재하지 않았기 때문에 나온 결과로 해석이 된다.

이상의 결과를 종합하여 볼 때 삽입방법이 교차타당성 방법보다 우수하다는 결론을 내릴 수가 있다. 또한 두 가지 방법 모두가 밀도함수의 추정능력보다는 뒤진다는 2절의 결과를 확인할 수가 있었다. 그러므로 도함수의 차수가 높아짐에 따라 커널추정량의 수렴율이 상당히 느려짐으로 커널추정방법 이외의 다른 방법을 연구하는 것도 하나의 흥미로운 연구과제가 될 것이다.

참고문헌

Bowman, A. (1984) *An alternative method of cross-validation for the smoothing estimates*, Biometrika, 71, 353-360.

Hall, P., S. J. Sheather, M. C. Jones and J. S. Marron (1991) *On optimal data-based bandwidth selection in kernel density estimation*, Biometrika, 78,263-269

Hardle, W., J.S. Marron and M.P. Wand (1990) *Bandwidth choice for density derivatives*, Journal of Royal Statistical Society, B, 52, 223-232.

Hardel, W. and Stoker, T. (1989) *Investigating smooth multiple regression by the method of average derivatives*, Journal of the American Statistical Society, 84, 986-995.

Park, B. U. and J. S. Marron (1990) *Comparison of data-driven bandwidth selectors*, Journal of the American Statistical Society, 85, 66-72

Rudemo, M. (1982) *Empirical choice of histogram and kernel density estimators*, Scandanavian Journal of Statistics, 9, 65-78.

Scott, D. W. and Terrell, G. R. (1987) Biased and unbiased cross-validation in density estimation, *Journal of the American Statistical Society*, 82, 1131-1146.

Sheather, S. J. and Jones, M.C. (1991) A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimaton, *Journal of Royal Statistical Society*, B, 53, 683-690

Silverman,B. W. (1986) *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, London.

Song, M. S., Seog, K. H. and Cho, S. S.(1991) *On asymptotically optimal plug-in bandwidth selectors in kernel density estimation*, Journal of Korean Statistical Society, 20, 29-43