▨응용논문

표준정규분포의 확률계산 프로그램 개발*

송서일
동아대학교 산업공학과

Development of Probability Computation Program for Standard Normal Distribution

Suh-Ill, Song
Dept. of Industrial Engineering, Dong-A University

Abstract

The well-known standard normal distribution has been used within the limit of standard variable value of $u = 3.59$. However, the probability values above the limit are not given in the literature. In this study, a probability computation program for standard normal distribution to $u = 5.99$ with the proportional normal distribution approximation suggested by Abramowitz and Stegun, Hastings is developed. The new standard normal distribution table developed by the program is presented and will be of help to estimate of probability values for testing and estimation of process mean value, lot acceptable probability, defective percentage of PPM unit of an out-of specification limit, process capability, test power of control charts, probability and statistics.

1. 서론

오늘날 고품질의 제품을 생산하기 위해서 검사를 실시하여 검사기준에 벗어나는 불량로트가 발생하면 로트를 선별하여 수리하거나 보수하는 등의 재손질한다는 사고방식에서 탈피하고, 공정에서 고품질을 만들어 넣는 체제로의 전환과 어떤 공정이나 부

* 이 논문은 1995년도 동아대학교 학술연구조성비에 의한 연구결과임.

품 및 제품에서 한개라도 불량품을 내서는 안되는 아주 적은 불량을 요하는 ppm(part per millions) 즉, 불량품이 100만개당 1개이하 단위의 관리 사고방식이 대두되고 있다. 그러나 제품의 품질을 ppm단위로 관리하기 위하여 공정평균의 검·추정, 샘플링검사에서 로트가 합격할 확률, 규격한계를 벗어나는 불량률의 추정, 공정능력의 평가, 기타의 확률과 통계등의 해석 및 관리에서 기존의 $\pm 3\sigma$ 한계로 나타낸 표준정규분포표를 사용하여 확률값을 구하는데는 다소 문제점이 발생하고 있다.

따라서 본 연구에서는 연속형 확률변수분포인 표준정규분포에서 표준화변수 u이하의 값중 그 어느 하나를 취하는 확률을 α라 하였을 때, $u(\alpha)$와 α의 관계를 표로 한 양쪽확률의 정규분포표를 제시하여 확률값을 사용하고 있으나 표준정규분포의 확률값이 $u = 3.59$, 즉 표준화변수가 3이상을 벗어나는 경우의 확률값에 대해서는 널리 일반적으로 알려져 있지 않기 때문에 기존 표준정규분포표로서는 사용하기가 불편하므로 Abramowitz와 Stegun(1972), Hastings(1955)가 제시한 비례적인 정규분포 근사식에 의하여 표준정규분포의 확률계산 프로그램을 개발하고, 그 결과로서 표준정규분포의 확률값을 쉽게 이용할 수 있는 표준정규분포표를 제시하고저 한다.

2. 프로그램 개발

2.1 이론전개

분위수와 Mills' 비와 같은 누적밀도함수(cdf) Φ(x)와 관련한 함수들은 연속함수처럼 연속적이며 다른 형태로 확장이 가능하다. 이 함수들의 수치적인 값을 계산하기 위한 적절한 알고리즘에 대해서도 지금까지 많은 연구가 수행되고 있다. <표 1>은 정규분포표와 관련해 Φ(x), ϕ(x), Z_α, ϕ(x)의 도함수, Mills' 비 R(x)와 같은 함수의 확률값을 계산한 가장 초기에 알려진 것이다[Kerridge, Cook, 1976].

Ibbeston(1963)과 Adams(1969)는 소수 7자리와 9자리까지 정확하게 누적밀도함수 Φ(x)를 계산하기 위한 알고리즘을 제시하였고, Hill과 Joyce(1967)는 설비능력의 범위내에서 적어도 소수 2자리까지 정확성을 제공하는 알고리즘을 제시하였다. 백분위수, 누적밀도함수 Φ(x), 확률밀도함수 ϕ(x) 그리고 x^2(카이제곱), t, F, 이변량 정규분포함수값과 관련한 함수들 및 다른 통계적인 분포에 대한 누적확률밀도함수를 계산하기 위한 서브루틴 프로그램인 IMSL(1977)이 개발되었다

Beasley과 Springer(1977)는 $N(0, 1^2)$에서 백분위수 Z_α를 계산하기 위해서 24-bit ICL시스템으로 10000번의 테스트로 최대오차 1.14×10^{-6}를 가지는 알고리즘을 제시하였다. Box와 Muller(1958)는 $N(0, 1^2)$에서 편차들을 산출하기 위해 독립정규변수(Z_1, Z_2)를 단위간격 (0, 1)인 일양분포을 따르는 독립확률변수 U_1, U_2의 변환을 식(1)과 같이 제안하였다.

$$Z_1 = (-2\ln U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2)$$
$$Z_2 = (-2\ln U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2) \quad 1.$$

< 표 1 > 누적밀도함수 Φ, 확률밀도함수 ϕ, 백분위수 Zα, ϕ의 도함수와 Mills' 비 R(x) 함수의 범위에 따른 유효숫자리 자료표. 단, [Φ(Zα)=1-α], [R(x)={1-Φ(x)}/ϕ(x)]

연 구 자	함 수	범 위	소수점	유효숫자자리
Abramowitz and Stegun(1964)[a]	Φ(x), ϕ(x), ϕ'(x)	x = 0.0(0.02)3.00	15	
	Φ(x)	x = 3.0(0.05)5.0	10	
	ϕ(x)	x = 3.0(0.05)5.0	9	
	ϕ'(x)	x = 3.0(0.05)5.0	7	
	$\phi^{(r)}(x)$, r = 2, · · ·, 6	x = 0.0(0.02)3.00(0.05)5.0	7-10	
	$-\log_{10}[1-\Phi(x)]$	x = 5(1)50(10)100(50)500	5	
	$\phi^{(r)}(x)$, r = 7, · · ·, 12	x = 0.0(0.1)5.0	7	
	ϕ(zα), zα	1-α = 0.500(0.001)0.999	5	
	zα	1-α = 0.975(0.0001)0.9999	5	
	zα	$\alpha = 10^{-r}$; r=4, · · ·, 23	5	
Owen(1962)	Φ(x), ϕ(x)	x = 0.0(0.01)3.99	6	
		x = 3.0(0.1)6.0(0.2)10(1)20, 25,30(10)100(25)200(50)500		
	1-Φ(x)			
	zα Φ(zα)	1-α = 0.50(0.01)0.09(0.005)0.99 (0.001)0.999(0.0001)0.9999		5
		etc. to $1-10^{-9}$		5
	Φ(x)/ϕ(x)	x = 0(0.01)3.99	5	
	R(x),ϕ'(x),ϕ''(x), ϕ'''(x)	x = 0.0(0.01)3.99	4	
	R(x)	x = 3.0(0.1)6.0(0.2)10(1)20, 25,30(10)100(25)200(50)500	5	
Pearson and Hartley(1966)	Φ(x), ϕ(x)	x = 0.0(0.01)4.50	7	
		x = 4.50(0.01)6.00	10	
	$-\log_{10}[1-\Phi(x)]$	x = 5(1)50(10)100(50)500	5	
	zα	1-α = 0.50(0.001)0.999	4	
		0.98(0.,0001)0.9999	4	
		$1-10^{-r}$(r=4, · · ·,9)	4	
	Φ(zα)	1-α = 0.50(0.001)0.999	5	
Pearson and Hartley(1972)	zα Φ(zα)	1-α = 0.50(0.001)0.999	10	
	zα	1-α = 0.999(0.0001)0.9999	8	
	Φ(zα)	1-α = 0.999(0.0001)0.9999	9	
	Φ(x)-0.5, ϕ(x) ϕ'(x), ϕ''(x)	x = 0.0(0.02)6.20	6	
	$\phi^{(r)}(x)$; r = 3, · · ·, 9	x = 0.0(0.02)6.20	5 to 1	
Rao et al. (1966)	Φ(x)-0.5	x= 0.00(0.001)3.0(0.01)4(0.1)4.9	6	
	Φ(x)	x = 0.0(0.01)3.0(0.1)4	6	
	zα	2(1-α) = 0.01(0.01)0.99 ;	6	
		10^{-r}(r=3, · · ·, 9)	5	
	2[1-Φ(x)]	x = 0.25,0.5(0.5)5.0	6	
Smirnov(1965)	Φ(x)-1/2, ϕ(x)	x = 0.00(0.001)2.50(0.002)	7	
		3.40(0.005)4,00(0,.01)4.50	10	
		x = 4.50(0.01)6.00		
	$-\log_{10}\{1-\Phi(x)\}$	x = 5(1)50(10)100(50)500	5	
Yamauti(1972)	Φ(x)	x = 0.0(0.01)4.99		5
	1-Φ(x)	x = 0.0(0.01)4.99		5
	1-Φ(x)	x = 0.1(0.1)10.0		35
	zα	α = 0.0(0.001)0.499	5	

[a] Tables complied by M. Zelen and N. C. Severo

Box-Muller의 변환은 소형컴퓨터 뿐만 아니라 대형 컴퓨터에서도 사용이 가능하며 Sengupta와 Bhattacharya(1958)에 의해 유도된 확률정규편차표을 사용할 수 있다. 누적밀도함수 Φ(x)를 평가하기 위해 대부분 Mills' 비의 [1-Φ(x)]/Φ(x)를 이용하지만, Laplace(1785)는 확률밀도함수 ϕ(x)를 직접적으로 포함하지 않는 멱급수 전개식을 $x \geq 0$에서 식 (2)와 같이 제시하였다.

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \cdots + \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)2^r(r!)} + \cdots\right] \tag{2}$$

이 급수는 x가 작을 때를 제외하고는 느리게 수렴한다[11]. $r = n-1$일 때 합계를 멈추고, 그 나머지를 $E_n(x)$라면,

$$|E_n(x)| < x^{2n+1} \exp(x^2/2)/[2^n(2n+1)\sqrt{2\pi}]$$

이다. Badhe(1977)는 $0 < x \leq 2$에서 식 (2)로 부터 근사식인 식 (3)을 유도하였다.

$$\Phi(x) = 0.5 + x\,(a + y[b + y\{c + y(d + y[e + y\{f + y(g + hy)\}])\}]) \tag{3}$$

$y = x^2/32$,

a = 0.3989,4227,84 b = -2.1276,9007,9

c = 10.2125,6621,21 d = -38.8830,3149,09

e = 120.2836,3707,87 f = -303.2973,1534,19

g = 575.0731,3191,7 h = -603.9068,0920,58

$0 \leq x \leq 2$에서 이 근사식의 최대 $|\varepsilon(x)|$는 0.20×10^{-8}이다. Kerridge와 Cook(1976)는 x값의 전범위에 걸쳐 간편한 근사식으로 식 (4)를 제안하였다.

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + (\sqrt{2\pi})^{-1}\, x\, \exp\left\{\frac{-x^2}{8}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_{2n}\left(\frac{1}{2}x\right)}{2n+1}, \quad -\infty < x < \infty \tag{4}$$

여기서, $\theta_0(x) = 1$, $\theta_1(x) = x^2/2$와 $\theta_{2n}(x)$은 식 (5)와 같이 순환관계로 얻어진다.

$$\theta_{r+1}(x) = \frac{x^2\{\theta_r(x) - \theta_{r-1}(x)\}}{(r+1)}, \qquad r = 1, 2, 3 \cdots \tag{5}$$

대안으로, $\theta_r(x) = x^r H_r(x)/r!$. 여기서 $H_r(x)$는 r번째 Hermite 다항식이다.

2.2 프로그램 개발

일반적으로 표준정규분포표의 경우, 규격수준이 3σ를 넘어가는 경우의 확률값이 0에 거의 수렴하기 때문에 표준화변수값을 3까지만 고려하였다. 그러나 오늘날의 제품품질이 ppm 단위의 품질까지 도달을 요하게 됨으로써 ppm 단위의 관리를 위한 확률값의 추정등의 어려움을 해결하기 위해 표준화변수가 3이상의 더욱 확장된 표준정규분포 확률값이 필요하게 되었다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 대부분 x가 주어졌을 때, 다항식과 비례적인 근사식을 사용하여 $\Phi(x)$을 계산하기 위한 알고리즘들이 활발이 연구되어지고 있다.

따라서 본 연구에서는 Abramowitz와 Stegun(1972), Hastings(1955)가 제시한 오차 $|\varepsilon(x)| < 1.5\times10^{-7}$를 가지는 비례적인 정규분포 근사식중에서 식 (8)에 의해 표준정규분포의 확률을 계산할 수 있는 프로그램을 <그림 1>과 같이 개발하였다.

(1) $$2[1-\Phi(x)] = [1+(0.196854)x+(0.115194)x^2+(0.000344)x^3 + (0.019527)x^4]^{-4}+2\varepsilon(x), \quad x\geq 0$$

$$|\varepsilon(x)| < 2.5\times10^{-4} \tag{6}$$

(2) $$2[1-\Phi(x)] = [1+(0.09979271)x+(0.04432014)x^2+(0.00969920)x^3 - (0.00009862)x^4+(0.00581551)x^5]^{-8}+2\varepsilon(x), \quad x\geq 0$$

$$|\varepsilon(x)| < 2\times10^{-5} \tag{7}$$

(3) $$2[1-\Phi(x)] = [1+(0.0498673470)x+(0.0211410061)x^2+(0.0032776263)x^3 + (0.0000380036)x^4+(0.0000488906)x^5+(0.0000053830)x^6]^{-16} + 2\varepsilon(x), \quad x\geq 0$$

$$|\varepsilon(x)| < 1.5\times10^{-7} \tag{8}$$

```
C  GENERATING THE TABLE OF STANDARD NORMAL DISTRIBUTION
C
      REAL*8 P,XX,Z,PROBN,BZ,PP
      DIMENSION PP(10),PLOT(10)
C
      OPEN(5, FILE='N.TAB',STATUS='NEW')
C
      DO 10 J=1,10
        PLOT(J)=(J-1.)/1000.
   10 CONTINUE
      WRITE(5,100) (PLOT(J),J=1,10)
  100   FORMAT(3X,'Z',4X,'|',10(6X,F4.3,4X))
      WRITE(5,200)
  200   FORMAT('----------',10('----------'))
C
      DO 20 I=1,1199
        BZ=(I-600.)/100.
C
        DO 30 J=1,10
          PP(J)=0.
   30   CONTINUE
C
        DO 40 K=1,10
          IF(BZ .LE. -.01) GOTO 15
            Z=BZ+(K-1.)/1000.
            GOTO 25
   15       Z=BZ-(K-1.)/1000.
   25     XX=PROBN(Z)
          P=1.-XX
          PP(K)=1.-P
   40   CONTINUE
C
        WRITE(5,300) BZ,(PP(K),K=1,10)
  300     FORMAT(1X,F5.2,2X,'|',10(2X,F12.11))
C
   20 CONTINUE
C
      STOP
      END
C
C
      DOUBLE PRECISION FUNCTION PROBN(UX)
C
C  CUMULATIVE NORMAL PROBABILITY
C
      REAL*8 UX,X,A1,A2,A3,A4,A5,A6
      PROBN=1.
      X=UX
      IF(UX.LT.0.) X=-UX
      IF(UX.GT.10.) GO TO 100
        A1=0.49867347D-1
        A2=0.211410061D-1
        A3=0.32776263D-2
        A4=0.380036D-4
        A5=0.488906D-4
        A6=0.5383D-5
        PROBN=(((((A6*X+A5)*X+A4)*X+A3)*X+A2)*X+A1)*X+1.
C
      DO 10 I=1,4
   10   PROBN=PROBN*PROBN
C
      PROBN=0.5/PROBN
      PROBN=1.-PROBN
  100 CONTINUE
C
      IF(UX.LT.0.) PROBN=1.-PROBN
      RETURN
C
      END
```

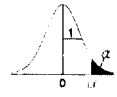
< 그림 1 > 표준정규분포의 확률 계산 프로그램

3. 결과 및 고찰

식 (8)과 <그림 1>의 프로그램에 의해 $u=5.99$, 즉 $u=6$까지의 확률계산 결과를 정리한 표준정규분포표는 <표 2>와 같다. (단, 한쪽확률만 표시)

< 표 2 > 표준정규분포의 확률계산결과

($u = 0.00 \sim 5.99$)



u	* =.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0*	.50000000000	.49601067591	.49202174537	.48803360759	.48404666151	.48006130570	.47607793825	.47209695664	.46811875761	.46414373705
0.1*	.46017228990	.45620480999	.45224168996	.44828332114	.44433009342	.44038239515	.43644061299	.43250513185	.42857633475	.42465460370
0.2*	.42074031460	.41683384714	.41293557467	.40904586912	.40516509987	.40129363365	.39743183445	.39358006341	.38973867871	.38590803849
0.3*	.38208848574	.37828037821	.37448405829	.37069986797	.36692814571	.36316922634	.35942344100	.35569111706	.35197257801	.34826814337
0.4*	.34457812866	.34090284527	.33724260040	.33359769700	.32996843368	.32635510464	.32275799961	.31917740378	.31561359774	.31206685739
0.5*	.30853745394	.30502565379	.30153171850	.29805590473	.29459846421	.29115964368	.28773968480	.28433882419	.28095729330	.27759531844
0.6*	.27425312071	.27093091594	.26762891471	.26434732228	.26108633860	.25788615821	.25462697031	.25142895866	.24825230160	.24509717204
0.7*	.24196373742	.23885215969	.23576259534	.23269519537	.22965010525	.22662746499	.22362740907	.22065006647	.21769556068	.21476400970
0.8*	.21185552603	.20897021668	.20610818323	.20326952177	.20045432297	.19766267209	.19489464896	.19215032805	.18942977848	.18673306402
0.9*	.18406024316	.18141136909	.17878648977	.17618564796	.17360888124	.17105622203	.16852769768	.16602333045	.16354313760	.16108713111
1.0*	.15865531922	.15624770349	.15386428183	.15150504708	.14916998733	.14685908597	.14457232178	.14230966894	.14007109712	.13785657150
1.1*	.13566605288	.13349949770	.13135685809	.12923808198	.12714311311	.12507189114	.12302435167	.12100042635	.11900004290	.11702312530
1.2*	.11506959338	.11313936384	.11123234936	.10934845914	.10748759889	.10564967091	.10383457411	.10204220416	.10027246347	.09852521136
1.3*	.09680036404	.09509779477	.09341738385	.09175900877	.09012254422	.08850786221	.08691483212	.08534332076	.08379319249	.08226430927
1.4*	.08075653070	.07926971415	.07780371482	.07635838577	.07493357805	.07352914073	.07214492102	.07078076428	.06943651416	.06811201261
1.5*	.06680710001	.06552161513	.06425539552	.06300827700	.06178009431	.06057068086	.05937986890	.05820748956	.05705337294	.05591734814
1.6*	.05479924337	.05369888597	.05261610251	.05155071887	.05050256023	.04947145121	.04845721589	.04745967788	.04647866039	.04551398627
1.7*	.04456547810	.04363295820	.04271624873	.04181517174	.04092954919	.04005920305	.03920395533	.03836362812	.03753804367	.03672702412
1.8*	.03593039307	.03514797259	.03437958630	.03362505792	.03288421160	.03215687194	.03144286411	.03074201380	.03005414734	.02937909157
1.9*	.02871667444	.02806672402	.02742906953	.02680354091	.02618996890	.02558818514	.02499802215	.02441931339	.02385189329	.02329559735
2.0*	.02275026173	.02221572422	.02169182329	.02067529106	.02067529106	.02018234254	.01969939622	.01922629647	.01876288885	.01830902830
2.1*	.01786453861	.01742923435	.01700313541	.01658591647	.01617748998	.01577771061	.01538643443	.01500351885	.01462882272	.01426220625
2.2*	.01390353109	.01355266031	.01320945842	.01287379137	.01254552657	.01222453288	.01191068064	.01160384165	.01130388919	.01101069813
2.3*	.01072414442	.01044410611	.01017046233	.00990309380	.00964188275	.00938671289	.00913746944	.00889403911	.00865631009	.00842417218
2.4*	.00819751626	.00797623530	.00776022335	.00754937604	.00734359047	.00714276523	.00694680036	.00675559734	.00656905914	.00638709015
2.5*	.00620959621	.00603648458	.00586766397	.00570304448	.00554253762	.00538605631	.00523351485	.00508482892	.00493991558	.00479869325
2.6*	.00466108164	.00452701190	.00439637644	.00426912900	.00414518463	.00402446967	.00390691175	.00379243975	.00368098383	.00357247537
2.7*	.00346684700	.00336403258	.00326396714	.00316658695	.00307182941	.00297963314	.00288993787	.00280268450	.00271781504	.00263527252
2.8*	.00255500148	.00247694692	.00240105533	.00232727417	.00225555193	.00218583812	.00211808329	.00205223899	.00198825773	.00192609304
2.9*	.00186569938	.00180703217	.00175004775	.00169470341	.00164095731	.00158876653	.00153809701	.00148890357	.00144114987	.00139479811
3.0*	.00134981253	.00130616635	.00126379482	.00122269365	.00118281934	.00114413913	.00110662103	.00107023375	.00103494674	.00100073017

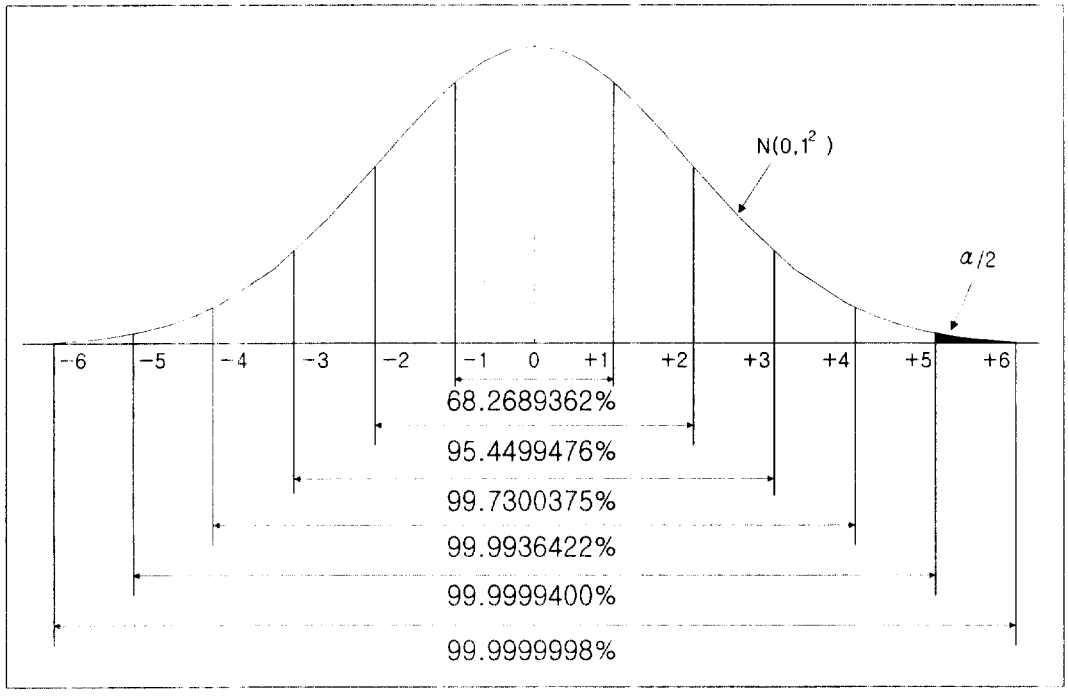
< 표 2 > 계 속

u	* = .00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
3.1*	.00096755487	.00093539237	.00090421488	.00087399526	.00084470699	.00081632423	.00078882172	.00076217483	.00073635952	.00071135234
3.2*	.00068713042	.00066367144	.00064095365	.00061895582	.00059765727	.00057703783	.00055707784	.00053775814	.00051906006	.00050096542
3.3*	.00048345647	.00046651596	.00045012707	.00043427343	.00041893907	.00040410848	.00038976654	.00037589853	.00036249012	.00034952739
3.4*	.00033699676	.00032488504	.00031317940	.00030186735	.00029093674	.00028037577	.00027017295	.00026031712	.00025079743	.00024160333
3.5*	.00023272457	.00022415118	.00021587350	.00020788211	.00020016788	.00019272194	.00018553567	.00017860072	.00017190895	.00016545248
3.6*	.00015922366	.00015321505	.00014741946	.00014182987	.00013643951	.00013124178	.00012623031	.00012139890	.00011674153	.00011225240
3.7*	.00010792584	.00010375638	.00009973873	.00009586773	.00009213840	.00008854591	.00008508558	.00008175288	.00007854343	.00007545296
3.8*	.00007247737	.00006961266	.00006685497	.00006420058	.00006164586	.00005918730	.00005682154	.00005454528	.00005235536	.00005024871
3.9*	.00004822237	.00004627345	.00004439920	.00004259692	.00004086403	.00003919801	.00003759645	.00003605699	.00003457738	.00003315543
4.0*	.00003178903	.00003047613	.00002921476	.00002800302	.00002683908	.00002572114	.00002464751	.00002361652	.00002262659	.00002167616
4.1*	.00002076374	.00001988792	.00001904729	.00001824052	.00001746633	.00001672346	.00001601073	.00001532698	.00001467108	.00001404198
4.2*	.00001343863	.00001286003	.00001230522	.00001177327	.00001126330	.00001077444	.00001030587	.00000985678	.00000942640	.00000901400
4.3*	.00000861886	.00000824030	.00000787765	.00000753029	.00000719759	.00000687897	.00000657386	.00000628172	.00000600203	.00000573427
4.4*	.00000547797	.00000523365	.00000499788	.00000477320	.00000455823	.00000435254	.00000415577	.00000396753	.00000378749	.00000361530
4.5*	.00000345062	.00000329316	.00000314260	.00000299866	.00000286106	.00000272954	.00000260383	.00000248369	.00000236888	.00000225918
4.6*	.00000215438	.00000205425	.00000195861	.00000186726	.00000178001	.00000169669	.00000161713	.00000154116	.00000146864	.00000139941
4.7*	.00000133332	.00000127025	.00000121005	.00000115261	.00000109780	.00000104550	.00000099562	.00000094803	.00000090263	.00000085934
4.8*	.00000081805	.00000077868	.00000074115	.00000070536	.00000067124	.00000063872	.00000060772	.00000057818	.00000055003	.00000052320
4.9*	.00000049764	.00000047329	.00000045009	.00000042800	.00000040695	.00000038691	.00000036782	.00000034965	.00000033234	.00000031587
5.0*	.00000030019	.00000028526	.00000027105	.00000025753	.00000024466	.00000023242	.00000022077	.00000020969	.00000019915	.00000018912
5.1*	.00000017958	.00000017051	.00000016189	.00000015369	.00000014589	.00000013848	.00000013143	.00000012473	.00000011837	.00000011231
5.2*	.00000010656	.00000010110	.00000009591	.00000009098	.00000008629	.00000008184	.00000007762	.00000007360	.00000006979	.00000006617
5.3*	.00000006273	.00000005947	.00000005637	.00000005343	.00000005064	.00000004799	.00000004548	.00000004309	.00000004083	.00000003868
5.4*	.00000003664	.00000003471	.00000003288	.00000003114	.00000002949	.00000002792	.00000002644	.00000002503	.00000002370	.00000002244
5.5*	.00000002124	.00000002010	.00000001903	.00000001801	.00000001704	.00000001613	.00000001526	.00000001444	.00000001366	.00000001292
5.6*	.00000001222	.00000001156	.00000001093	.00000001034	.00000000978	.00000000924	.00000000874	.00000000826	.00000000781	.00000000738
5.7*	.00000000698	.00000000660	.00000000624	.00000000589	.00000000557	.00000000526	.00000000497	.00000000470	.00000000444	.00000000419
5.8*	.00000000396	.00000000374	.00000000353	.00000000334	.00000000315	.00000000297	.00000000281	.00000000265	.00000000250	.00000000236
5.9*	.00000000223	.00000000211	.00000000199	.00000000188	.00000000177	.00000000167	.00000000158	.00000000149	.00000000140	.00000000132

<표 2>의 결과로서 $u=5.99$, 즉 $u\fallingdotseq 6$까지 양쪽(한쪽)확률과 규격한계에 따른 잉품율(%)와 불량률(ppm)을 나타내면 <표 3>과 같고, $\mu\pm 6\sigma$영역하에서 표준정규분포 곡선을 나타내면 <그림 2>와 같다.

< 표 3 > $\pm 5.99\sigma$ 규격한계의 양품율(%)과 불량률(ppm)

u	소숫점 자리	확률		규격한계	양품율(%)	불량률(ppm)
		양 쪽	한 쪽			
1.00		31.7310638%	15.8655319%	$\pm 1.00\sigma$	68.2689362	317,310.638
1.64	10^{-1}	10.1005120%	5.05025600%	$\pm 1.64\sigma$	89.8994880	101,005.120
2.00		4.55005240%	2.27502620%	$\pm 2.00\sigma$	95.4499476	45,500.524
2.58	10^{-2}	0.98798310%	0.49399155%	$\pm 2.58\sigma$	99.0120169	9,879.831
3.00		0.26996250%	0.13498125%	$\pm 3.00\sigma$	99.7300375	2,699.625
3.29	10^{-3}	0.10193100%	0.05096550%	$\pm 3.29\sigma$	99.8998069	1,001.931
3.89	10^{-4}	100.497PPM	50.2485PPM	$\pm 3.89\sigma$	99.9899503	100.497
4.00		63.578PPM	31.789PPM	$\pm 4.00\sigma$	99.9936422	63.578
4.42	10^{-5}	9.995PPM	4.998PPM	$\pm 4.42\sigma$	99.9990005	9.995
4.90	10^{-6}	0.995PPM	0.498PPM	$\pm 4.90\sigma$	99.9999005	0.995
5.00		0.600PPM	0.300PPM	$\pm 5.00\sigma$	99.9999400	0.600
5.30	10^{-7}	0.125PPM	0.063PPM	$\pm 5.30\sigma$	99.9999875	0.125
5.70	10^{-8}	0.014PPM	0.007PPM	$\pm 5.79\sigma$	99.9999986	0.014
5.99		0.002PPM	0.001PPM	$\pm 5.99\sigma$	99.9999998	0.002



< 그림 2 > $\mu \pm 6\sigma$ 영역하에서 표준정규분포곡선 및 확률

<표 2>와 <표 3>의 결과들을 통해서 표준화변수 u에 따르는 정규분포의 확률면적을 계산해 보면 <그림 2>와 같이 $\mu+\sigma$와 $\mu-\sigma$사이에는 68.2689362%, $\mu+2\sigma$와 $\mu-2\sigma$사이에는 95.4499476%, $\mu+3\sigma$와 $\mu-3\sigma$사이는 99.7300375%, $\mu+4\sigma$와 $\mu-4\sigma$사이는 99.9936422%, $\mu+5\sigma$와 $\mu-5\sigma$사이에는 99.9999400%, $\mu+6\sigma$와 $\mu-6\sigma$사이에는 99.9999998%의 양품율과 각각의 불량률(ppm)을 구할 수 있다.

4. 결론

공정의 오차분포가 정규분포라는 가정하에서 표준정규분포의 확률값이 일반적으로 $u=3.59$까지만 제시되어 있어, 여러가지 다양한 상황에 있어서 확률값을 추정하는 경우에 기존의 표준정규분포표만으로는 다소 문제점이 발생하게 된다. 따라서 본 연구에서는 이러한 단점을 보완하기 위하여 $u\leq 6$까지 표준정규분포의 확률값을 계산할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 이를 통해 6σ의 규격한계까지 확률값을 쉽게 구할 수 있는 표준정규분포표를 제시함으로써 공정평균의 검·추정, 샘플링검사에서 로트가 합격할 확률 $L(p)$ 또는 $L(m)$의 값, 규격한계를 벗어나는 ppm단위의 불량률의 추정, 공정능력의 평가, 관리도의 검출력, 기타의 확률과 통계등의 해석 및 관리가 가능하게 된다.

참고문헌

[1] Abramowitz, M., and Stegun, I.A.(1972) "*Handbook of Mathematical Functions*," Washington, D.C. : National Bureau of Standards, p.932.

[2] Adam, W.J.(1969), Algorithm 39 : Areas under the Normal Curve, *Computer Journal*, 12, pp. 197~198.

[3] Badhe, S.K.(1977), "New Approximation of the Normal Distribution Function," *Communications in Statistics* B5, pp. 173~176.

[4] Beasley, J.D., and Springer, S.G.(1977), Algorithm ASIII : The Percentage Points of the Normal Distribution, *Applied Statistics* 26, pp. 118~121.

[5] Box, G.E.P., and Muller, M.E.(1958), "A Note on the Generation of Random Normal Deviates," *Annals of Mathematical Statistics* 29, pp. 610~611.

[6] Hastings, C.(1955), *Approximations for Digital Computers*, Princeton, N.J. : Princeton University Press, pp. 185~187.

[7] Hill, I.D., and Joyce, S.A.(1967), Algoritm 304 : Normal Curve Integral, *Communications of Association for Computing Machinery* 10(6), pp. 374~375.

[8] Ibbetson, D.(1963), Algorithm 209 : Gauss, *Communications of the Association for Computing Machinery* 6, p. 616.

[9] IMSL(1977) Library 3, Edition 6, IMSL Inc., 7500 Bellaire Blvd., 6th floor, GNB Bldg., Houston, Tex, 77036.

[10] Jadgish, K., Patel., and Campbell B. Read.(1982), "*Handbook of The Normal Distribution*," Marcel Dekker, Inc, pp. 43~76.

[11] Kerridge, D.F., and Cook, G.W.(1976), "Yet Another Series for the Normal Internal", Biometrika 63, pp. 401~403.

[12] Laplace, P.S (1785), "Memoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de tres-grands nombres," *Histoire de l'Academie Royale des Sciences de Paris*, pp. 1~88 ; reprinted in *Oeuvres Completes*, Vol. 10, pp. 209~291.

[13] Sengupta, J.M., and Bhattacharya, N.(1958), "Tables of Random Normal Deviates," *Sankhya* 20, pp. 250~286.