괴델 불완전성 정리에서 유도 안될 수도 있는 명제

金 相 文
(연세대)

괴델의 제2 불완전성 정리(G2 : Gödel's 2nd incompleteness Theorem)의 발견 이래 그것의 수학적 또는 철학적 의미와 응용에 관해 많은 연구가 진행되어 왔다 (Rosser의 강화된 형태로의 G2는 산술식을 포함할 정도로 강한 모든 공리이론은 모순을 내포하거나 혹은 그외의 정리(extra-theoretical arguments)로써 참임을 보일 수 있지만, 그 이론체계내에서는 참 혹은 거짓을 보일 수 없는 그러한 식이 존재함을 주장한다).

예컨데, 인간인식에 있어 기계론의 오류; 자연수에 내재된 애매성 그리고 힐버트 계획은 그 원래 형태로는 이행될 수 없다라는 의미말이다.

우리는 모든 무한수학이 유한수학의 형태로 바뀔 수 없음을 괴델의 정리로서 알게 되었다. 따라서, 얼마나 많은 부분의 무한수학이 타당화 될수 있는 것인가 하는 문제가 남게 된다. 부언하면, 무한수학의 어떤 부분이 유한논법으로 환원될 수 있겠는가 하는 문제이다. 우리는 이 문제를 다음과 같은 형태로 표현할 수 있겠다. "무한수학의 얼마나 많은 부분이 π_1^0 문장에 관해서, PRA를 보존하는 Z_2의 부체계 내에서 전개될 수 있겠는가?"

우리는 상당히 꽤 많은 부분이 가능하다는 것을 최근 연구에 의해 알게 되었다.

한편, Detlefsen 은 (M.Detlefsen, 1979 : 310)에서 다음과 같이 논한다:

"힐버트 계획의 종말은 G2로 부터 오는것이 아니라 고전이론인 T이론 자체의 논리와 T이론의 유한증명 이론의 논리가 서로 다른 논리라는 것을 이해하지 못한데서 온다. 우리가 위사실을 인지하면, Con(T)가 T내에서 증명될 수 없다라는 사실이 힐버트 계획의 실패를 말하는 것이 아님을 알게된다."

이러한 내포관계 연구 노선으로 본 논문은 명제(Con(VBI) → (VBI $\not\vdash$ Con(VBI)))가 G2 에 의해 내포 안될 수도 있음을 보이는데 그 목표를 두고 있다. 그 결론에 이르기 위해 전 명제를 G2 가 아닌 일반 집합적 공리에서 유도하려고 한다 (VBI 는 impredicative extension of Von Neumann-Bernays-Gödel Theory (VBG)를 뜻한다). 우리는 본 논문연구의 목적상 VBI 를 기본 공리로 취한다. VBI 집합이론은 Von Neumann - Godel 이론에 imperdicative comprehension schema 를 추가한 것으로 Kelly 의 "General Topology" 부록에 처음 나타났다. 그렇지만 사실은 Hao Wang이 그전에 그것을 NQ로 명하고 (Wang, 1949: 150) 에서 논한바 있다. VBG 내에서 Z-F 집합론의 진리정의에 관한 연구 (Mostowski, 1950: 111) 에서 VBI 이론에 대한 몇몇 흥미로운 사실들을 밝혀냈다. VBI 역시 자연 모델의 모든 족의 존재를 보일 수는 없지만, VBG 보다 근본적으로 좀 더 확연한 성질들을 증명할 수 있다. VBI 가 유한공리화 될 수 없음이 최근 연구에 의해 밝혀졌다. VBG에 도달불가능한 순서수가 존재한다는 가정을 추가한 이론이 모순일 확률이 적다는 것이 일반적 견해다.

본론으로 들어가 본 논문에 사용될 기호 및 용어를 언급할 순서인데, 여기서 특별히 정의 안된 것은 (H. Enderton, 1972) 및 (T. Jech, 1978)에 따른다.

기 호

(i) VBI $\vdash \varphi$: VBI 는 φ를 증명한다.

(ii) (L , ε) : standard transitive model (간단히 L로 약할 수 있다)

(iii) Con (VBI) $\leftrightarrow \neg \exists \varphi$ (VBI $\vdash \varphi \wedge$ VBI $\vdash \neg \varphi$)

(iv) $\dashv$: 증명 끝

사 실 1

$\forall \varphi$ (VBI $\vdash \varphi \rightarrow \forall$ L (L $\models$ VBI $\rightarrow$ L $\models \varphi$)

사 실 2 (T. Jech, 1978 : 88)

R이 well-founded 이고 set like 이며 A에서 확장 가능하다고 가정하면 transitive 족 M과 (A, R) 과 (M, ε)사이에 동형함수 G가 존재하게 된다. 또 M과 G는 유일하다.

정 리 1

$\exists L(L \models VBI \wedge \neg \exists \ell \in L(\ell \models VBI))$

증 명

$\forall L(L \models VBI \wedge \exists \ell \in L(\ell \models VBI)) \xrightarrow{(사실 2)} \exists \ell^1 \in \ell(\ell^1 \models VBI)$

$\longrightarrow \exists \ell^2 \in \ell^1(\ell^2 \models VBI)$

$\vdots$

상기 작업을 계속하여 얻은 결과는 명제 $\forall A$($\in$은 A위에서 well-founded)에 모순된다. ┤

관 찰

정리 1은 model 론적 의미상 논리적 등가인 아래 두 명제중의 임의 것을 내포한다.

(a) $\exists L(L \models VBI \wedge L \not\models con(VBI)) \vee \neg \exists \ell(\ell \models VBI)$

(b) $\forall L(L \models VBI \rightarrow L \models con(VBI)) \rightarrow \neg \exists \ell(\ell \models VBI)$

정 리 2

$(VBI \vdash con(VBI)) \rightarrow \forall L(L \models VBI \rightarrow L \models con(VBI))$

증 명

사실 1 ┤

정 리 3

$(VBI \vdash con(VBI)) \rightarrow \neg con(VBI)$

증 명

$(VBI \vdash con(VBI)) \xrightarrow{(정리 2)} (\forall L(L \models VBI \rightarrow L \models con(VBI)))$

$\xrightarrow{(관찰)} \neg \exists \ell(\ell \models VBI) \rightarrow \neg con(VBI)$ ┤

즉, 정리 3의 대우명제가 G2가 아닌 일반 공리에서 유도 되었다.

참고문헌

1. Detlefsen, Michael (1979), "On Interpreting Gödel's Second Theorem" *Journal of Philosophical Logic* 8, pp.297-313.
2. Enderton, Herbert B. (1972), *A Mathematical Introduction to Logic,* Academic press, New York.
3. Jech, T. (1978), *Set Theory,* Academic Press.
4. Mostowski, A. (1950), "Some impredicative definitions in the axiomatic set theory, " *Fund. Math.* Vol. 37, p. 111.
5. Wang, Hao. (1949), "On Zermelo's and Von Neumann's axioms for set theory", *Proc. N.A.S.*, Vol. *35,* p.150.