수학적 추론에 관한 소고

이 병 수 (경성대)
강 미 광 (동의대)
양 규 한 (대연고)

I. 서 론

고등학교 학생들에게 수학을 가르칠 때, 교사는 학생들이 수학자가 되게 하려는 것이 아니라 수학적으로 사고하고 그 사고력을 바탕으로 합리적이고 타당한 추론을 할 수 있도록 하기 위한 목적과 수학과교육이 추구하는 목표에 도달하기 위하여 학생들에게 다양한 학습의 기회 제공과 적절한 교수 방법을 사용한다.

수학 교수-학습에서 비교하고, 대조하고, 추측하고, 귀납하고, 일반화하고, 특수화하고, 분류하고, 범주화하고, 연역하고, 시각화하고, 계열화하고, 순서짓고, 예언하고, 타당화하고, 증명하고, 관계를 맺고, 분석하고, 평가하고, 패턴화하는 그런 다양한 사고 기능[주1)]을 통하여 수학적인 관련성을 찾고, 문제를 해결하고 수학적 추론을 하며 수학적 의사소통을 한다.[주2)] 그런 활동을 원활하게 하기 위하여 교사가 교실에서 무엇을, 어떻게 하여야 할까를 생각하지 않을 수 없다. 학생들의 사고를 이해하고 효과적으로 수학을 가르치기 위하여 수학적 추론에 대하여 고찰할 필요성을 느끼게 된다.

먼저 수학적 추론의 의미와 종류를 알아보고, 예를 통하여 학생들이 하는 추론을 살펴보고, 끝으로 수학적 추론의 중요성과 추론 연습으로서의 수학교수를 살펴보고자 한다.

II. 수학적 추론의 의미와 형태

고전 논리학의 체계를 완성한 아리스토텔레스는 논리적 추론을 이끌어내는 법칙을 사고법칙이라 하였고 여기에는 개념, 판단, 추리의 3요소가 사고 활동의 요소가 된다고 하였다. 사고 활동의 요소로서 개념은 문제해결을 위해 필요로 하는 과거의 경험, 지식, 정보 등이 현재의 정신작용에 파고드는 것이다. 판단은 문제해결의 아이디어를 가지게 하는 것으로 대상을 비교, 분석, 종합하는 사고작용에서 얻어지며, 추리는 개념, 판단에 의한 기초 밑에 실제로 문제를 해결해 나가는 방법으로 귀납추리, 연역 추리, 비교추리를 의미한다.[주3)]

추리(resoning)에 대하여 교육학대사전(교육서관,1987)에서 그 의미를 찾아보면 다음과 같다.

"추리는 적응과정에 있어서 목적을 달성하기 위한 직접적인 행동을 통제하여 어떻게 행동하는 것이 적절한가 어떤 방법을 사용하는 것이 적절한가를 결정하게 하는 체제이다. 이 체제는 분화되지 않는 경우도 있지만 분화하는 경우에는 이 수단적 체제에서 중심적 역할을 하는 것이 추리이다. 수단적 체제로서 중요한 것은 ① 언어 기호와 같이 추상적인 도구를 사용하는 경우 ② 물질적인 도구를 사용하는 두가지다. 정도의 차이는 있으나 어느 경우에나 의식적 과정으로서 행한 행동이나 행하려고 하는 행동에 대해 논리를 세워 설명할 수 있는 것이 보통이다. 일반적으로 말하면, 추리란 언어나 기호를 도구로 사용한 경우를 말하며 전제(premise)에서 결론(conclusion)을 끌어내는 과정이다."[주4)]

Micheal H.Agar는 민족지학적 관점에서, "추론을 함으로써 서로 다른 지식의 단편들이 연결되고 지식은 세계와 연결된다. 내가 어떤 것을 알고 있거나 혹은 관찰하면 다른 것도 알게 된다고 주장할 때마다, 나는 추론을 하고 있는 것이다."라고 하면서 추론의 필요성을 주장하고 있다. 그는 계속해서 "추론개념은 기억으로부터 혹은 세상과의 상호작용에 의해 형성되는 지식을 연결해주는 것을 나타낸다. 추론은 마디와 그들을 연결해주는 연결부로 구성된다. 추론은 그럴듯함 혹은 제약의 정도에 따라 주장되고, 그들이 상호 연결되는 현상 유무를 포함할 수도 있다. 마디는 행위, 상태, 사람, 목표 혹은 대상일 수 있다. 가장 단순한 형태의 추론은 두 개의 마디 연결을 주장하는 것이다."라고 추론에 대하여 이야기하고 있다.[주5)]

"사리를 미루어서 생각하는 것, 혹은 이미 아는 사실을 전제로하여 미루어서 다른 사실을 알아내는 것"으로 '추리'를 정의하는 <우리말 국어사전>에서는 "미루어 생각하여 논술하는 것이나 어떠한 문제를 가지고 의논하여 다른데 미쳐서 짓는 결론"을 '추론이라고 하고 있다.[주6)]

그렇다면 수학적 추론이란 무엇인가? 수학적 사고가 아이디어를 이해하고, 그 아이디어 사이의 관계들을 발견하고, 그 아이디어와 그들의 관계에 대한 결론을 이끌어내거나 지지하도록 하고, 또한 그 아이디어를 포함하는 문제를 해결하도록 하기 위하여, 수학적으로 풍부한 사고 기술을 사용하는 것을 말하며, 수학적 추론이란 일반화하고 아이디어들과 그아이디들이 어떻게 관련되는가에 관한 타당한 결론을 이끌어내는 수학적 사고의 일부분이다.[주7)]

수학적 추론의 형태를 살펴보자. '어떤 집합의 몇 개의 원소에 대한 정보를 이용하여 그 집합의 다른 원소 또는 모든 원소에 대한 일반화를 형성하는 수학적 추론'인 귀납적 추론과, '타당한 추론 패턴을 이용하여 전제로부터 결론을 이끌어내는 수학적 추론'인 연역적 추론을 들수 있다. 즉,귀납적 추론은 특수한 예들로부터의 일반적인 결론의 도출을 의미하고, 연역적 추론은 필연적으로 따르는 추론의 논리적인 연쇄로 도출되는 결론을 의미한다.

귀납적 추론에서 특수한 몇 개의 예로부터 일반화하여 갈 때, 그 일반화를 이루게 하는 나머지 원소들의 속성을 학생들은 추측하고 그 추측의 정당성을 고려하여야 한다. 여기서 학생들의 어려움이 있다. 즉, 원래 주어진 예들의 집합과 나머지 부분의 예들인 여집합에 대한 관찰과 추리를 필요로 하기 때문이다. 그리하여 잘못된 결론을 도출하여 낼 수도 있다.

유비에 의한 추리(유추)란 엄밀하지는 않지만, 하나의 수학적 대상이나 대상들의 집합이 지니는 성질을 그와 구조상 유사한 다른 대상에도 그 성질을 가지고 있으리라고 추측하는 것으로써 귀납의 경우와 마찬가지로 그 결론이 일반적으로 확실한 것이 아니고 개연적인 것에 지나지 않으며 가정, 추측이란 성격을 지닌다. 이런 특징으로 인하여 유추는 때때로 귀납적 추리에 포함시키기도 한다[주8]. 이리하여 수학적 이론의 수단을 다른 것에 적용시키는 것이 가능하다는 것이 유추의 특성이 성질이 다른 수학적 대상 사이의 깊은 유사성에 바탕을 둔다는 것으로 설명이 가능하지만, 그러나 유비에 의한 풍부한 추론이 될만한 유사성을 찾아낸다는 것은 비교되는 대상의 성질이 비슷한 경우에도 쉽지 않을 수도 있다. 두 대상에 대한 깊은 연구를 통하여 발견에 이르는 원천이 될 구조적인 유사점을 찾아낼 수 있게 한다. 이와같이 유추에 의해서 판단한다면 하나의 대상에서 새로운 성질을 발견할 수도 있다. 그 발견된 성질은 증명을 통하여 타당화된다.

유비 추론이나 귀납적 추론은 창조력을 기르는 중요한 추론 방식이다. 또한 문제 해결의 과정에 있어서도 유추나 귀납에 의하여 일정한 절차를 밟아 해결의 단서를 찾고, 적절한 착안점을 택해서 처리하고 해결함으로써 수학상의 중요한 사실이나 어려운 문제의 해결이 이루어진 것을 쉽게 찾아볼 수 있다.

연역적 추론에서는, 참인 전제에서 출발하여 추론을 할 때, 그 추론이 타당하다면 그 결론은 참이고, 역으로는 그 추론을 이용하여 도출되는 어떤 결론도 참이 되면 그 추론은 타당한 추론이 된다. 여기에서 학생들의 추론에서 오류가 발생할 수도 있음을

짐작할 수 있다. 즉, 추론은 타당하지 못하더라도 참인 전제에서 참인 결론을 학생들은 도출하기도 한다. 그리하여 학생들은 잘못된 추론을 통하여 얻은 결론이 참인 경우에는 그 추론의 잘못을 인식하지 못하고 지나치게 될 것이다. 그러므로 교수의 상황에서 올바른 추론 연습의 필요성을 느끼게 된다. 올바른 추론 연습으로서의 교수-학습상황이라고 하더라도 그것이 엄밀한 수준의 증명만을 의미하는 것은 아니다. 증명을 하여야 할 때에도 학생의 수준에 적절한 엄밀성으로 증명을 하는 것이 학생의 학습에 도움이 됨을 여러 연구를 통하여 알 수 있다.[주9)]

하나의 전제에서 출발하여 하나의 결론으로 추론하여 가는 것만이 있는 것이 아니라, 두 개 이상의 전제에서 하나의 결론으로 추론하여 가는 경우도 있기 때문에 문제는 상당히 복잡하게 된다.[주10)]

종합적으로 학생들은 귀납적 추론을 통하여 개념을 종합하고, 연역적 추론을 통하여 개념을 분류한다고도 볼 수 있다.귀납적 추론은 다소 불확실성을 가지고 있지만 창조적이고 활동적이다.한편으로 연역적인 추론은 다른 사람에게 확신을 시키는 가장 타당한 추론 방법이지만 발전성이나 비약성에는 다소 부족한 점도 있다.[주11)]

과연 학생들은 이런 두 가지 방식의 추론 만을 사용하는가? Martin A. Simon은 이 두가지 외에 제 3의 추론 형식이 있다고 주장한다.

III. 변환적 추론[주12)]

Martin A. Simon의 논문을 중심으로 살펴 보자.

Balacheff(1987) 등의 말을 인용하여, 학생들의 수학적 아니디어의 생성과 타당화에 관한 수학 연구는 기본적으로 귀납적 추론과 연역적 추론에 초점을 맞추어 왔다고 이야기하면서 Simon은 "수학을 이해하고 수학적인 타당성을 결정하기 위한 수학을 배우는 학생들의 탐색은 귀납적, 연역적 추론 뿐만아니라 제3의 추론 형태를 이끈다."라고 하면서 이 제3의 추론 형태를 변환적 추론이라고 명명한다. 그의 예를 살펴보자.

<예1>(Simon,1989)

Goodhue 교사의 10학년 기하 수업에서 Mary는 이등변 삼각형에 관한 탐구 학습을 하고 있었다. 그 학급은 아직 '이등변 삼각형의 밑각은 같다'는 정리에 대하여 공부한 적이 없었다. 학생들에게 Geometric Supposer software를 사용하여 이등변 삼각형을

연구하고 변의 길이와 각의 크기를 주어진 표에 기록하도록 하였다. Mary는 세변의 크기를 지정하여 이등변 삼각형을 만들고 있었다.

교사: Mary, 두 각과 그 끼인 변을 지정하여 이등변 삼각형을 만들 수 있겠니?

Mary는 잠시 멈추고나서 같은 (밑)각들을 잡았다.

교사: 너가 했던 것을 나에게 말해줄 수 있겠니?

Mary: 두 사람이 이 변의 양 끝에서 서로를 향하여 같은 각의 크기로 걸어가면, 그들이 만날 때그들은 똑같은 거리를 걸었을 것이라는 것을 알고 있어요.

저자: 왼 쪽에 있는 사람이 그 변에서 더 작은 각으로 걸어가면 어떻게 될까?

Mary: (망설이지 않고) 그때 그사람은 (오른쪽 사람보다) 그들이 만나기 전까지 더 많이 걸었을거예요.

이 예에서 교사는 학생들이 여러 가지 다른 이등변 삼각형을 만들어보고, 두 밑각이 같다는 하나의 패턴을 알아내기(귀납적 추론)를 기대했다. 이것은 모든 이등변 삼각형에 관한 하나의 추측을 만들고 연역적 증명에 대한 필요성을 창출할 것이다. Mary는 이등변 삼각형의 두 변과 두 밑각 사이의 관계를 아는, 하나의 다른 방법을 제시했다. Mary는 이등변 삼각형을 특수한 크기의 고정된 도형으로서가 아니라, 오히려 한 선분의 두 끝점으로부터 삼각형을 만드는 역동적인 과정으로서 이등변 삼각형을 인지할 수 있었다. Mary의 역동적, 정신적 모델에 의하여, 이등변 삼각형의 두 밑각 사이의 관계 뿐만 아니라 다른 밑각이 주어진 삼각형의 두변들의 상대적인 길이에 관하여 추론하는 것을 알았다. 추론의 본성에 따르면, 이런 두 아이디어들은 연결되어 있다.; 이등변 삼각형은 삼각형의 각과 대응변에 관한 이해의 특수한 하나의 경우였다.

Simon은 "변환적 추론은 대상들이 겪는 변환들을 가시화하게하는 대상이나 대상들의 모임 위에서의 작용소나 작용소들의 모임 그리고 이런 작용들의 결과들의 모임의 정신적 활동이나 육체적 활동이다. 변환적 추론에서 중심적인 것은, 고정된 상태가 아니라 하나의 상태나 상태들의 연속체가 만들어지는 역동적인 과정을 고려하는 능력이다."라고 주장한다.

(예1)의 이등변 삼각형에 관한 Mary의 추론을 살펴보면, '작용되어지는 대상들의 집합'은 이등변 삼각형들의 밑각들일 것이다. 이런 대상들을 변환하는 '작용소'는 원 선분의 끝점으로부터 선분들(경로들)의 '생성'이다. '결과들'은 만들어진 삼각형들이다.

정의에서, '정신적 활동'은 정신적 상에서 수행되어지는 작용소들을 말한다. 변환적 추론의 결과는 종종 '작용하는 방법의 이해에 관한 감각'을 의미한다.

"Piaget와 Inhelder는 정신적인 상에 관련된 유사한 두 개의 구분을 만들었다. 그들은 정신적 상들을 재생산적, 선행적인 것으로 범주화하여 어떤 정신적인 상은 앞선 개념을 재창조하거나 앞서 가지고 있지 않았던 변형들은 미리 알지도 모른다는 것을 시사하였다. Piaget와 Inhelder는 계속해서 재생산적인 상을 정적인, 동적인 그리고 변환적인 것으로 상세화하였다. 변환적 추론은 변환적인 재생산적 상이나 예기되는 상에 의하여 지지된다. 각 경우에 문제해결자는 작용으로부터 변환적 결과를 가시화할 수 있다."라고 변환적 추론의 정의에 대한 설명을 하고 있다.

Simon은 수학을 이해하는 방법으로서의 변환적 추론에 대하여 다음 세가지를 들고 있다.

① 귀납적 연역적 추론과 마찬가지로, 변환적 추론의 예들은 상대적으로 사소한 것에서 부터 극히 강력한 것까지 분포할 수 있다.

② 변환적 추론은 특별한 정신적, 육체적 활동을 수행할 능력 뿐만 아니라 특별한 수학적 상황에 이르는 과정의 적합한 실현화를 함의한다.

③ 변환적 추론은 수학적 상황에 관한 다른 사고방식을 만들어 줄 뿐만아니라 질문들의 다른 경향을 내포할 수도 있다.

이 변환적 추론은 귀납적 추론 및 연연적 추론 둘 다에 중첩된다. 몇몇 귀납적 전략들은 결과들을 수집하기 위하여 '블랙박스'를 작동하는 것과 유사할 수 있으며 반면에, 몇몇 귀납적 전략들은 포함되어 있는 변환의 작동의 이해를 이끌어낸다. 유사하게, 연역적 논증이 그 현상의 본질에 관한 통찰을 보이지 않고도 타당성을 결정하는 반면에, 다른 것은 관련된 변환의 기제를 분류한다.

또한 귀납적이지도 않고 연역적이지도 않은 변환적 추론의 영역이 있다.

효과적인 문제 해결은 변환적, 귀납적, 연역적 추론의 조화로운 사용을 함의한다. 이 변환적 추론이 수학적 아이디어를 이해하고 타당화하기를 모색하는 인간(학습자)의 자연스런 성향이다.

앞에서 Simon이 이야기하는 변환적 추론을 간단히 요약하면, 변환적 추론은 '작용하는 방법의 이해에 관한 감각'으로서 대상의 구조에 대하여 통찰을 보이는 것이다. 앞에서 설명한 유추와 비슷하게 생각이 되지만, 차이점은 있다. 수학적인 표현으로, 유추는 대상의 구조적인 면에서 서로 동형사상으로 간주할 수도 있고, 변환적 추론은 표상의 변환으로써 동형사상이 될 수도 있다고 볼 수 있다. 그러므로 참인 표상의 올바른 변환이라면 그 결과는 반드시 참일 수 밖에 없다.

다소 직관적이긴 하지만, 변환적 추론을 사용할 때, 학생들은 주어진 문제 상황을 자기 나름으로 이해하고 변환적으로 추론하는 경향이 있다. 학생들은 자신의 지식을 바탕으로 하기 때문에 변환적 추론의 결과를 별로 의문없이 받아 들일 수도 있다. 귀납이나 변환적으로 추론을하여 아이디어를 발견하고 (문제 상황의 경우에는 문제 뜻을 파악하고) 그 발견된 것에 대하여 연역적인 추론을 통하여 학생 자신의 수학적 신념 체계나 지식 체계를 재구성하도록 하여야 한다. Simon의 이야기 처럼, 변환적 추론은 '작용하는 방법의 이해에 관한 감각'이지 그것 자체가 증명을 의미하는 것은 아니다. 귀납적 추론, 연역적 추론 및 변환적 추론의 조화로운 사용으로 학생들의 수학지식 구성에 효과적인 도움을 줄 수가 있을 것이다.

IV. 각 추론의 영역별 예

한 번 더 Simon이 주장한 변환적 추론과 귀납적 추론 및 연연적 추론에 대하여 그 영역을 살펴보고 그 예를 찾고자 한다.

몇몇 귀납적 전략들은 결과들을 수집하기 위하여 '블랙박스'를 작동하는 것과 유사할 수 있으며(A영역) 반면에, 몇몇 귀납적 전략들은 포함되어 있는 변환의 작동의 이해를 이끌어낸다.(B영역) 유사하게, 연역적 논증이 그 현상의 본질에 관한 통찰을 보이지 않고도 타당성을 결정하는(E영역) 반면에, 다른 것은 관련된 변환의 기제를 분류한다.(D영역) 또한 귀납적이지도 않고 연역적이지도 않은 변환적 추론의 영역이 있다.(C영역)

수학적 귀납법" [1] $f(1)$: 참이고, [2] $f(k)$: 참이면 $f(k+1)$:참이 된다. 그때, 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 참이다"를 학습하는 교실 수업 상황을 설정하여 시나리오를 만들어 보자. 여기에서는 수업의 방법에 대하여는 초점을 두지 않고, 학생들이 하는 추론에 초점을 둔다. 그리고 이해의 편리를 위해서, 앞에서 Simon이 언급한 영역에 맞추어서 추론을 한 학생의 이름은 영역의 문자를 사용한다.

(예2)

교사: ("[1] $f(1)$: 참이고, [2] $f(k)$가 참이면 $f(k+1)$:참이 된다. 그때 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 참이다"를 칠판에 적고난 뒤) 이런 증명법을 수학적 귀납법이라고 합니다. 오늘은 이 수학적 귀납법에 관해서 공부하여 봅시다. 이 수학적 귀납법의 원리를 설명이나 증명할 수 있는 사람?(잠시 학생들에게 생각을 하도록 지시한다. 잠시후 한 학생이 질문을 한다.)

학생G: 선생님! 수학적 귀납법을 하나의 "증명법"이라고 하셨는데, 증명하는 방법을 어떻게 증명할 수 있나요?

교사: 증명이라는 것은 타당한 추론을 의미하는 거예요. 그 추론이 타당하다는 것을 어떻게 알 수 있나요? 그것은 또 다른, 이미 알려진 타당한 추론이나 사실을 이용하여 증명을 해야 하겠지요. 이미 알려진 타당한 추론은 어떻게 만들어졌을까요? 이것을 역추적하여 가면, 역추적이 더 이상 되지 않는 것이 나오겠지요? 그 마지막을 "공리"라고 하는데 그 공리는 몇 개가 있음이 알려져 있어요. 그 공리들로서 만들어지는 참인 것을 정리라고 하지요. 다시 공리나 정리들에 의하여 연역적으로 추론된 정리를 만들게 되고…. 그래서 우리는 그런 공리나 정리를 이용하여 새로운 아이디어를 찾고 증명하는 거예요. 그리고 그렇게 증명된 것은 정리가 되는 거예요. 그래서 이 수학적 귀납법은 하나의 정리가 되겠지요. Peano라는 사람이 이야기한 공리들 중에 4번째가 이와 유사해요. 그래서 Peano 4번 공리를 수학적 귀납법이라고도 하지요. 그런데 이 정리는 우리가 모든 자연수에 대하여 성립하는 수식의 증명에서 혹은 그와 유사한 구조를 갖고 있는 체계의 증명에서 추론 원리로써 자주 사용하게 되요. 그래서 이것을 증명법이라고 한 거예요. 알겠죠? 우리도 열심히 공부해서 그런 하나의 정리를 만들수 있다면 좋겠지요?

자, 이제 수학적 귀납법에 관하여 생각해 봅시다. (한 학생을 지적한다.)

학생A: $f(1)$이 참이고, [2]식에 의하여 $f(2)$도 참이 됩니다. 또한, $f(2)$가 참이므로 $f(3)$도 참이 됩니다. (잠시 머뭇거린다) 같은 원리로 계속하여 가면, 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 참이 됨을 알 수 있습니다.

교사: 잘 하였습니다. (학생)A의 의견을 여러분은 어떻게 생각합니까?

학생X: '천리길도 한 걸음부터'라는 우리나라 속담이 있듯이 하나씩 하나씩하여 가면 결국 그렇게 되는 것이 아닐까요?

교사: 응? 그렇다면 더 먼 길도 가능할까요?

학생들: 그렇지 않을까요? 당연히 그렇게 될 것 같은데요.

교사: 직관적으로는 그럴 수밖에 없을 것 같지요? 그런데, 우리는 매우 큰 자연수 n에 대하여도 성립한다고 어떻게 보장할 수가 있을까요?

학생B: $f(1)$이 참이므로 [2]식에 의하여 $f(2)$도 참임을 알 수 있습니다. 그리고

$f(3)$도 참이고 …(잠시 머뭇거린다.) 예, 일렬로 보도 블록을 깔아놓고, 첫 보도 블록부터 한 발에 하나씩의 보도 블록을 밟고 지나가게 한다면 아무리 많은 보도 블록이라도 끝까지 모두 밟을수 있습니다. 그래서, 수학적 귀납의 원리가 성립함을 알 수 있습니다.

교사: 예! 보도블럭을 일렬로 놓고 차례로 밟아 간다면 모두 밟고 지나간다는 아주 기발한 아이디어를 갖고 있군요! 그럼, (학생)B의 의견에 여러분은 어떻게 생각합니까? 동의합니까?

학생들: 예!

학생C: 선생님, 저는 이렇게도 생각해 보았습니다. 일렬로 세워진 도미노가 있을 때, 하나의 도미노 $f(k)$가 넘어지면 다음 도미노 $f(k+1)$가 넘어지도록 하였을 때, 제일 앞 도미노 $f(1)$을 넘어 뜨리면 아무리 많은 도미노라도 넘어집니다. 그러므로 수학적 귀납의 원리가 성립함을 알 수 있다고 봅니다.

교사: 예! 정말 잘 했습니다. 이제 여러분은 수학적 귀납법의 원리에 대하여 충분히 이해를 한 것 같군요. 지금까지 발표한 학생들의 의견들은 "수학적 귀납법"의 증명으로써 우리는 받아 들일 수 있을까요?

학생들: …

교사: 지금까지의 의견들은 "수학적 귀납법"의 구조에 대한 이해라고 볼 수 있지요. (학생)A의 의견은 증명으로서 미흡하겠지요? 왜냐하면, 매우 큰 수에 대하여 성립한다는 것을 우리는 어떻게 알 수 있나요. 여러분들은 수학적 귀납의 원리를 충분히 이해하고 있는 것 같군요. 이제 "수학적 귀납법"에 관한 증명을 해 보도록 합시다. 누구 증명을 할 수 있는 사람?

학생E: 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 참인 것은 아니라고 가정할 때, $f(1)$이 참이므로 $f(n)$ 이 참이 되지 않는 2 이상인 최소의 자연수N이 존재한다는 것을 알 수 있습니다. 그때, $f(N-1)$이 참이 되어서는 안됩니다. 이것은 N의 최소성에 모순이 됩니다. 그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 참이 되어야 합니다.

교사: 훌륭하게 잘 했습니다. (학생)E의 증명을 정리하여 봅시다. 먼저번에 " $p \Rightarrow q$"와 동치가 되는 식은 무엇이지요?

학생들: " $\sim p \vee q$ "입니다.

교사: 맞아요. 그것을 부정하면 어떻게 되지요?

학생K: "$p \wedge \sim q$"가 됩니다.

교사: (지금까지의 이야기를 칠판에 적어면서) "$p \Rightarrow q$"와 동치인 식은 "$\sim p \vee q$"이고, 그것의 부정은 "$p \wedge \sim q$". "$p \Rightarrow q$"을 증명한다는 것은 "$p \wedge \sim q$"가 '모순 명제'임을 보이면 되겠지요. 그 원리를 이용하여 (학생)E는 "수학적 귀납법을 증명한 것입니다. 알겠지요?

학생들: 예!

교사: 그런데, 우리는 여기서 주의해야 할 것이 있어요. 증명이라고 하는 것은, 증명하고자 하는 것의 결과q를 이야기하는 것이 아니라, "$p \Rightarrow q$"라고 하는 문장 전체를 말하는 거예요. 그 이유는 증명이라는 것이 추론을 의미하기 때문이예요. 그렇다면, 이제 변형된 수학적 귀납의 원리에 대하여 공부하여 봅시다. [2]식을 "$f(n)$이 참이면 $f(n+2)$가 참이다"로 바꾸면, [1]식은 어떻게 바뀌어야 할까요?([1]식은 공란으로 두고 [2]식을 변형하여 칠판에 적는다. 잠시후 학생D를 지적한다.)

학생D: (잠시 망설이다가) $f(n)$이 참이 되지 않는 최소의 자연수N에 대하여 f(N)이 참이 아니면 f(N-2)은 참이 아닙니다. 그리고, f(N-1)은 …음.(망설인다.) 예, N이 짝수이면, $f(2)$가 참이어야 하고, N이 홀수이면, $f(1)$이 참이어야 합니다. $f(1)$혹은 $f(2)$가 참이다? $f(1)$과 $f(2)$가 참이다? (잠시 후) 예, 도미노를 홀수 번째는 오른쪽에, 짝수번째는 왼 쪽에 놓고 모두 쓰러 뜨릴려면, 양쪽 맨 앞에 것을 쓰러 뜨려야 하므로, 답은 $f(1)$과 $f(2)$가 모두 참이어야 합니다.

학생A는 귀납적 추론인 유추를 하고 있다. $f(3)$까지 참인 것을 찾고는 그 다음 부터는 같은 구조라고 느끼고 유추를 하고 있다. 아직 학생A는 수학적 귀납법의 구조내에서 그 체계를 보고 있다. 그러나 학생B의 경우는 처음에 귀납적 추론을 하다가 수학적 귀납법의 구조를 파악하게 되었다. 그리하여 변환적 추론을 불러오게 되어 보도블록을 생각하게 되었다. 학생C의 경우는 처음부터 수학적 귀납법의 원리를 파악하고 그 구조 밖에서 사고를 하고 있다. 즉, 변환적 추론을 하고 있다. 그리하여 도미노의 원리와 수학적 귀납법의 원리가 같음을 알고 있다. 학생E는 처음부터 연역적 추론으로 그 체계를 타당화하고 있다. 그러나 학생E는 수학적 귀납법의 원리를 완전히 이해하고

있다고 할 수는 없다. 그가 알고 있는 '부정'을 이용한 연역적 증명법을 사용함으로써 그 구조의 절차적인 측면만을 타당화하고 있다고 볼 수 있다. 학생B,C와 학생E를 비교하여 보면 차이가 있음을 알 수 있다. 수학적 귀납법을 이용한 증명에서 학생B,C가 학생E에 비하여 성공적일 것이라고 추측할 수 있다. 끝부분에서 교사가 그 구조를 일부 변경시킴으로써 학생들에게 그 구조에 대하여 파악을 하도록 하고 있다. 학생D의 경우는 학생E의 연역적 추론을 하다가 구조를 파악하게 된다. 그리하여 변환적 추론을 하게 된다. 도미노의 구조를 일부 변경시킴으로써 수학적 귀납법의 원리를 타당화하고 있다. 위의 교실 상황에서 보면, 학생A,B,C,D는 수학적 귀납법의 원리의 구조를 파악하고 있다고 볼 수 있다. 학생E의 경우는 구조를 파악하고 있는지 알 수는 없다. 학생 B,C,D는 수학적 귀납의 원리의 구조 밖에서 유사한 구조를 형성하고 있다. 그러나 학생A는 그 구조 내에서만 그 구조를 보고 있다. 여기에서 학생B,C,D는 변환적 추론을 하고 있다.

위의 예에서는 변환적 추론을 사용하기 전에 그 구조체계를 올바르게 파악한 경우이다. 그러나 어떤 학생은 그 구조체계를 잘못 파악하고 변환적 추론을 사용할 수도 있다. 학생X는 수학적 귀납의 원리의 구조를 파악하고는 있지만 그 구조를 정확하게 꿰뚫어 보지 못하고 있는 것 같다. 즉, 속담의 뜻에서는 식[1]을 강조하고 있고, 식[2]의 작용 원리에 대해서는 변형이 가능할 수도 있다. 학생X는 변환적 추론을 사용하고 있지만 주어진 구조를 제대로 파악하지 못하고 있는 경우이다. 그렇다고 그것이 가치가 없는 것은 아니다. 변환적 추론 자체는 수학적 영역의 범위를 확장시켜 주기 때문이다. 그리고 Simon의 이야기처럼 학생들은 이런 추론을 통하여 수학의 구조를 이해하려는 경향이 있기 때문이다. 불완전하기 때문에 학습이 이루어지고 창조적이되며, 발달이 이루어지기 때문이기도 하다.이런 추론들을 이해하고 활용할 수가 있다면 우리는 기꺼이 그렇게 하여야 한다. 추론의 중요성을 다음의 장에서 살펴보고, 또한 방법론적으로 추론 연습으로서의 수학교수를 살펴볼 것이다.

V. 수학 교수-학습에서의 수학적 추론의 중요성

수학을 이미 이루어진 학문적 지식 체계로 보는 외재적 수학관과 학습자 스스로 창조해 나가는 사고 활동으로 보는 수학적 활동 두가지의 관점이 있는 데, 수학, 심리학, 논리학, 교육학의 경계 학문으로서의 수학교육을 NCTM(미국 수학교사 협의회)은 수

학적 활동에 기반을 둔 수학에 의해 지지됨을 강조하고 있다. 이런 수학적 활동의 핵심적인 것은 수학적 추론임을 알 수 있다.[주13)]

NCTM에서는 교사가 학교에서 수학이 지도되고 학습되는 방법을 변화시키는 데 있어서 주체가 됨을 가정하여, 현재 이용되고 있는 수업방법을 학생들이 유능해지도록 수학을 지도하는 방법으로 변화하는 데 필요한 수학 수업환경에서의 주된 변화의 방향을 다음과 같이 제시하고 있다.[주14)]

① 수학적 공동체로서의 논리와 수학적 증거를 지향한다.(단순히 개인의 집합체로서의 학급에서 탈피한다.)

② 입증으로서의 논리와 수학적 증거를 지향한다.(교사를 정답에 대한 유일한 권위로 여기는 것을 탈피한다.)

③ 수학적 추론을 지향한다.(기계적인 해답찾기를 강조하는 것을 탈피한다.)

④ 수학과 그 아이디어, 적용 등을 관련짓는 것을 지향한다.(수학을 개념과 절차의 고립된 체계로 보는 것을 탈피한다.)

이상의 수업의 주된 변화의 방향의 수단은 수학적 추론에 두고 있다.

우리나라 제6차 교육과정에서 수학 학습 평가는 수학적 지식과 기능, 추론 능력, 문제해결력, 수학적 성향의 정도를 판단하여야 하고 스스로 문제해결을 위한 전략을 세우고, 논리적인 추론을 통하여 해결해나가는 과정과 종합적인 사고력을 평가할 수 있어야 함을 강조하고 있다.[주10)]

미국의 대학입시위원회의 수학과의 일반적인 목표 중에서 공리, 논리적 추론, 방법과 증명, 그리고 증명된 정리와 물리적인 현실과의 관계에 대한 아이디어의 이해를 부분적으로 강조하고 있으며[주16)], NCTM 교과과정과 평가 규준은 모든 학생을 위한 5개의 일반적인 목표를 '① 학생들이 수학의 가치를 배우는 것 ② 수학을 하는 그들의 능력에 자신감을 갖는 것 ③ 그들이 문제해결자가 되는 것 ④ 그들이 수학적으로 의사소통하도록 배우는 것 ⑤ 그들이 수학적인 추론을 배우는 것'으로 열거하면서 수학적 추론을 배우는 것을 목표로 삼고 있음을 알 수 있다.

이상을 종합하여 보면 수학적 추론의 중요성을 알 수 있다. 수학 교수-학습에서 비교하고, 대조하고, 추측하고, 귀납하고, 일반화하고, 특수화하고, 분류하고, 범주화하고, 연역하고, 시각화하고, 계열화하고, 순서짓고, 예언하고, 타당화하고, 증명하고, 관계를 맺고, 분석하고, 평가하고, 패턴화하는 그런 다양한 사고 기능을 통하여 수학적인 관련성을 찾고, 문제를 해결하고 수학적 추론을 하며 수학적 의사소통을 한다.

결론적으로 수학교육에서 추론이 학생들에게 수학적 지식을 구성하게 하고 수학적 지식의 체계를 수립하게 하는 기제로서 사용됨을 알 수 있다. 이런 중요한 수학적 추론을 교사로서 우리는 교실에서 어떤 방법으로 학생들이 실행할 수 있도록 할 수 있을까?

VI. 추론 연습으로서의 수학교수

추론 연습으로서의 수학 수업 역시 보편적인 것이 되어야 한다. 학생들은 추론이 진가를 발휘하는 수학적 논의에 참여할 기회를 자주 가져야 한다. 학생들은 주어진 결론에 이르기 위한 추론과정을 설명하도록 또는 어떤 문제에 대해 특정 접근 방법이 왜 적절한지 정당화할 수 있도록 권장되어야 한다. 수학 수업에서 추론을 강조하는 목적은, 교사나 교과서의 권위에 의존하는 것이 아니라 학생들 스스로 결론에 이르게 하고 자신의 진술을 정당화하게 하는 것이다.[주14)]

다시 말해서, 다른 학생들과의 의사소통에서 목소리가 크거나 물리적인 힘이 강해서가 아니라 타당한 추론을 통하여 자신을 정당화시키도록 하는 것이다.

NCTM은 다음을 수학적 연결성, 문제해결, 수학적 추론, 의사소통에 초점을 맞추어 다음을 강조하고 있다.[주17)]

1. 공식화, 문제 설정, 다양한 전략을 사용한 문제해결, 결과의 입증과 해석, 해결의 일반화를 포함한 문제 해결 제 측면을 강조하고 모형화한다.
2. 수학적 추론의 역할을 강조하고 예시해 보인다.
3. 쓰거나 말로 혹은 시각적 형태로 수학적 의사 소통을 하는 것을 강조하고 모형화한다.
4. 문제해결, 추론, 의사 소통을 포함하는 과제에 학생들을 참여시킨다.
5. 수학적 대화에 학생들을 참여하게 함으로써, 문제 해결에 대한 이해를 증진시키고 수학적으로 추론하고 의사 소통하는 능력을 신장시킨다.

이상을 종합하여 보면, 추론에 대한 교수 상황이 곧 학생의 추론에 대한 학습 상황으로 연결된다는 보장을 할 수는 없다. 그런 학습상황의 제공을 위하여 과제주기나 평가에서의 추론을 위한 문제해결력을 강조할 수도 있지만, 학생의 수준에 대한 올바른 이해를 바탕으로 하고, 학생의 활동을 보장하는교수를 전개하여야 함은 분명하다. 교수는 학생들의 적극적인 참여를 유도하고 동기를 부여하고 학생의 수준에 어울리는

교수가 되어야 한다. 그러기 위해서 교사는 수업을 계획할 때 학생들이 수학적 추론을 할 수 있도록 계획하고, 수학적 추론과 의사소통을 할 수 있는 질문을 한다. 그런 다음 그 질문에 대한 답을 분석한다. 학생들의 다양한 수학적 추론을 경청하고, 그 추론을 이해하고, 가능하다면 다른 추론도 할 수 있도록 질문을 한다. 그리고 나서 교사는 자신의 전략이 학생들을 수학적 대화에 참여하게 하는데 효과적인지 점검한다. 교사는 학생들이 자신의 아이디어를 어떻게 의사소통하는지에 주의를 기울인다. 교사의 자기 평가는 추론과 의사소통을 증진하는데 과제가 얼마나 효과적이었는지, 그리고 그 과제를 어떻게 수정할 수 있는지에 초점을 둔다. 교사는 학생들에게 수학을 의사소통하는 여러 가지 수단을 제공하여야 한다.

결론적으로, 추론으로서 수학을 가르친다는 것은 교사가 추론의 몇가지 형식을 제시하거나 원리를 보여주는 것이 아니고, 또한 학생들이 기억하고 있는 절차와 규칙을 되풀이하도록 하는 것을 의미하는 것이 아니다. 학생과 교사의 일대일이 아닌 공동체로서 학생들 스스로 참여하여 활동을 바탕으로 추론하는 것을 의미한다. Henry Steele Commager의 이야기처럼, '아이들은 채워질 그릇이 아니라, 비추어지는 램프'이다. 수학교사는 학생들에게 문제를 제기하고 문제의 속성을 추측하고 파악하게하여 풀이를 제시하게 하고 다른 학생들에게 그것을 공유할 수 있도록 의사소통케 하고, 추론케 하여야 하며, 아울러 예와 반례를 연구하는 수업을 진전시키는 것을 보편화하여야 한다.

VII. 요약 및 결론

수학의 교수-학습에서 수학적인 관련성을 찾고, 문제를 해결하고 수학적 추론을 하며 수학적 의사소통을 한다. 그런 활동을 원활하게 하기 위하여 교사가 교실에서 무엇을, 어떻게 하여야 할까를 생각하지 않을 수 없다. 학생들의 사고를 이해하고 효과적으로 수학을 가르치기 위하여 수학적 추론에 대하여 고찰할 필요성을 느끼게 된다.

학생들은 귀납적 추론을 통하여 개념을 종합하고, 연역적 추론을 통하여 개념을 분류한다고도 볼 수 있다. 귀납적 추론은 다소 불확실성을 가지고 있지만 창조적이고 활동적이다. 한편으로 연역적 추론은 다른 사람에게 확신을 시키는 가장 타당한 추론 방법이지만 발전성이나 비약성에는 다소 부족한 점도 있다.

학생들의 수학적 아니디어의 생성과 타당화에 관한 수학 연구는 기본적으로 귀납적 추론과 연역적 추론에 초점을 맞추어 왔지만, 수학을 이해하고 수학적인 타당성을 결

정하기 위한 수학을 배우는 학생들의 탐색은 귀납적, 연역적 추론 뿐만아니라 변환적 추론을 도출한다.

변환적 추론은 귀납적 추론 및 연연적 추론 둘 다에 중첩된다. 몇몇 귀납적 전략들은 결과들을 수집하기 위하여 '블랙박스'를 작동하는 것과 유사할 수 있으며 반면에, 몇몇 귀납적 전략들은 포함되어 있는 변환의 작동의 이해를 이끌어낸다. 유사하게, 연역적 논증이 그 현상의 본질에 관한 통찰을 보이지 않고도 타당성을 결정하는 반면에, 다른 것은 관련된 변환의 기제를 분류한다. 또한 귀납적이지도 않고 연역적이지도 않은 변환적 추론의 영역이 있다.

귀납이나 변환적으로 추론을 하여 아이디어를 발견하고 (문제 상황의 경우에는 문제 뜻을 파악하고) 그 발견된 것에 대하여 연역적인 추론을 통하여 학생 자신의 수학적 신념 체계나 지식 체계를 재구성하도록 하여야 한다. 귀납적 추론, 연역적 추론 및 변환적 추론의 조화로운 사용으로 학생들의 수학지식 구성에 효과적인 도움을 줄 수가 있을 것이다.

수학 교수-학습에서 비교하고, 대조하고, 추측하고, 귀납하고, 일반화하고, 특수화하고, 분류하고, 범주화하고, 연역하고, 시각화하고, 계열화하고, 순서짓고, 예언하고, 타당화하고, 증명하고, 관계를 맺고, 분석하고, 평가하고, 패턴화하는 그런 다양한 사고 기능을 통하여 수학적인 관련성을 찾고, 문제를 해결하고 수학적 추론을 하며 수학적 의사소통을 한다.

추론에 대한 교수 상황이 곧 학생의 추론에 대한 학습 상황으로 연결된다는 보장을 할 수는 없다. 그런 학습상황의 제공을 위하여 과제주기나 평가에서의 추론을 위한 문제해결력을 강조할 수도 있지만, 학생의 수준에 대한 올바른 이해를 바탕으로 하고, 학생의 활동을 보장하는 교수를 전개하여야 함은 분명하다. 교사는 학생들의 적극적인 참여를 유도하고 동기를 부여하고 학생의 수준에 어울리는 교수를 하여야 한다. 그러기 위해서 교사는 수업을 계획할 때 학생들이 수학적 추론을 할 수 있도록 계획하고, 수학적 추론과 의사소통을 할 수 있는 질문을 한다. 그런 다음 그 질문에 대한 답을 분석한다. 학생들의 다양한 수학적 추론을 경청하고, 그 추론을 이해하고, 가능하다면 다른 추론도 할 수 있도록 질문을 한다. 그리고 나서 교사는 자신의 전략이 학생들을 수학적 대화에 참여하게 하는데 효과적인지 점검한다. 교사는 학생들이 자신의 아이디어를 어떻게 의사소통하는지에 주의를 기울인다. 교사의 자기 평가는 추론과 의사소통을 증진하는데 과제가 얼마나 효과적이었는지, 그리고 그 과제를 어떻게 수정할 수 있

는지에 초점을 둔다. 교사는 학생들에게 수학을 의사소통하는 여러 가지 수단을 제공하여야 한다.

추론으로서 수학을 가르친다는 것은 교사가 추론의 몇가지 형식을 제시하거나 원리를 보여주는 것이 아니고, 또한 학생들이 기억하고 있는 절차와 규칙을 되풀이하도록 하는 것을 의미하는 것이 아니다. 학생과 교사의 일대일이 아닌 공동체로서 학생들 스스로 참여하여 활동을 바탕으로 추론하는 것을 의미한다. 수학교사는 학생들에게 문제를 제기하고 문제의 속성을 추측하고 파악하게하여 풀이를 제시하게 하고 다른 학생들에게 그것을 공유할 수 있도록 의사소통케 하고, 추론케 하여야 하며, 아울러 예와 반례를 연구하는 수업을 진전시키는 것을 보편화하여야 한다.

문제해결 활동과 관련한 수학적인 사고를 살펴보면, 문제가 완전히 파악되어 해결방법을 모색하는 단계에서는 직관적 논리적으로 조건을 정비처리하고, 귀납적 유추적으로 해결방법을 찾아보기도 하고, 대체적인 예측을 하고, 계획을 세워보기도 하는 등의 사고를 진행해 나간다. 그러는 사이에 해결의 실마리가 잡히면, 연역적으로 추론을 하거나 문제의 구조를 파악해서 구체적으로 처리를 한다. 이렇게 해서 일이 해결되어 어느 지점에 이르면, 종합적으로 검토하고 반성적인 사고를 한다. 그런 후, 통합적 발전적으로 사고를 정리하여 진행해 나가는 것이다. 또한 기호와 형식화 등을 통해서 아름답게 조정하고, 필요없는 추론은 생략해서 경제적으로 사고를 전개시킬 수 있도록 정비해 나간다. 이런 과정을 밟아나가면, 발전적으로 다음 문제가 일어나기도 하고, 미해결의 문제가 발견되기도 해서, 새로운 문제해결 활동이 시작될 것이다. 그리하여 수학적 사고는 수학의 기본 지식으로서의 수학 내용 자체에 관한 사고와 수학적인 사고방식으로서의 수학에서 보이는 여러가지 사고 방법으로 정리할 수 있다. 이처럼 이들 양자는 서로 독립하여 존재하는 것이 아니고 서로를 매체로하여 합일된 상태에 도달함으로써 효율적인 사고로 나아갈 것이다.

흔히 수학을 연역적 학문이고, 수학적 사고는 연역적(논리적) 사고에 지나지 않는다고 말하고 있는 데, 이것은 수학 및 수학적 사고의 한 측면에 지나지 않는다. 완성된 수학은 엄밀한 연역적 추론임이 분명하다. 그러나 창조의 과정에 있는 수학은 발견 과정에 있는 다른 임의의 과학과 닮은 데가 있다. 즉, 정리를 증명하기 전에 우리는 그 정리를 발견하지 않으면 안된다. 그리고 그 정리를 증명하기에 앞서 증명방법에 대해 추측을 하지 않으면 안된다. 따라서 수학의 교수 학습에 어느 정도의 수학적 창조의 과정을 반영하려 한다면, "증명하는 것"뿐 아니라 "추측하는 것"도 가르치지 않으면

안된다.[주18)]

수학의 적극적인 교수-학습이란 수학적 활동의 교수 학습이라 할 수는 있지만, 이것이 모든 것을 발견법에 귀착시키는 것은 아니며 학생들이 배우는 것을 모두 발견하여야 한다는 이유도 되지 않는다.[주19)] 발견물 그 자체에 목적이 있는 것이 아니라, 발견하는 상황을 부여하고 기꺼이 학생들이 동참하게 함으로써, 비록 발견은 못하더라도, 발견한 것이 이미 발견된 것일 지라도 학생들은 수학적 의미를 가질 수 있다. 발견을 하려고 하는 동안 (동화와 조절을 통한) 수학적 지식의 체계를 학생들 스스로 수립한다고 본다면, 정리에 대한 형식적 증명 그 자체를 보이는 것보다 증명을 위한 추론 과정을 보이고, 그 추론 형식을 이해시키고, 다양하고 타당한 추론 방법을 제시하도록 하는 것이 학생들로 하여금 지식 구성에 도움이 될 것이다. 학생들 스스로 결론에 이르게 하고 자신의 의사를 정당화하게 하는 것으로써 추론을 강조하여야 한다.

다양한 표상 형식으로 수학적 상황을 부여하는 것이 직접 교수보다는 시간적으로 현재는 더 걸릴지라도 학생들이 수학적 체계를 이해하고 지식을 구성하고 (실제로 교사가 수학의 다양한 측면을 직접 교수로 전부 제시할 수도 없다) 적극적으로 수학의 공동체에 참여하게 되면, 결국 현재의 시간적 손실은 감수할 만한 가치를 가진다.

적절한 수준으로 증명을 제시하고, 다양한 방법의 추론을 하게하는 수학적 상황을 제시하기 위해서는 교사의 꾸준한 연구와 노력이 요구된다.

실생활 속에 산재해 있는 수학적 상황을 다양한 방법의 표상 형식을 사용하여 문제로 제시하고, 추론을 이해하여 의사소통케 한다면 수학교육의 하나의 목표인 수학의 미를 음미하게 할 수도 있을 것이다.

(주 해설)

주1) Phares G. O'Daffer 외 공저, 서동엽 번역, 비판적 사고와 수학적 추론, 증명, 수학교육 연구 주제2, 대한수학교육학회, 1995년 하계 집중 세미나 논문집, 1995., pp.35 ~ 56.

Phares G. O'Daffer 등은 비판적 사고 기능으로서 비교하기, 대조하기, 추측하기, 귀납하기, 일반화하기, 특수화하기, 분류하기, 범주화하기, 연역하기, 시각화하기, 계열화하기, 순서짓기, 예언하기, 타당화하기, 증명하기, 관계를 맺기, 분석하기, 평가하기, 패턴화하기 등을 들고 있으며, 논리적 추론, 수학적 사고, 비판적 사고가 어떻게 구별되는지 뚜렷하지 않다고 이야기하고 있다.

주2) Douglas T. Owens 저, 류희찬 번역, 서론, 수학교육 연구 주제1, 대한수학교육학회, 1995., p.12.

Douglas T. Owens는 수학의 매우 다른 상황 속에서 발생하는 어떤 주제들을 연결성, 문제해결, 추론, 의사소통으로 정리할 수 있다고 보고 있다.

주3) 안철호, 언어능력과 수학적 사고력과의 관계, 학국교원대학교 교육 대학원 수학교육 석사학위 논문, 1992, p.10.

주4) 교육학 사전 편찬 위원회, 교육학 대사전, 교육서관, 1987.

주5) Micheal H. Agar 저, 이용남외 공역, 민족지학이야기, 교육과학사, 1993, pp.37 ~ 42.

주6) 학글학회 지음, 우리말 국어 사전, 어문각, 1992.

주7) Phares G. O'Daffer 외 공저, 서동엽 번역, 비판적 사고와 수학적 추론, 증명, 전게서.

주8) 이용률 외 공저, 수학교육론, 교학연구사, 1994., pp.53 ~ 54.

주9) 자세한 것은 "서동엽 저, 증명 지도에 관한 연구, 대한수학교육학회 논문집 제1권 제1호, 1991., pp.123 ~ 135."를 참조하라.

주10) 논리학에서는 하나의 전제에서 하나의 결론을 추론하는 것을 직접 추론이라고 하고, 두 개 이상의 전제에서 결론을 추론하는 것을 간접 추론이라고 한다. 특히 두 개의 전제(대전제와 소전제)에서 결론을 추론하는 것을 삼단 논법이라고 한다.

주11) 이용율 등은 "수학교육론"이라는 책에서 다음과 같이 이야기하고 있다.;

귀납을 사용하였기 때문에 잘못된 결론을 얻을 가능성이 있다고 해서 수학의 교수-학습에서의 귀납의 역할을 부정할 충분한 근거는 못된다. 첫째로 교사는 진리의 발견에 귀납을 적용해야 한다. 다음으로는 귀납적 결론의 개연적인 성격에 대한 학생들의 이해를 얻을 필요가 있다. 따라서 귀납을 적용할 때에는 결론이 가정, 가설에 지나지 않는다는 것 즉, 그것이 참이면 증명되어야 하고 거짓이면 반박되지 않으면 안된다는 것을 여러 가지 방법으로 강조할 필요가 있다.

본질적인 차이가 결론의 성경에 있는 연역과 귀납은 밀접한 관계가 있다. 귀납과 연역은 종합과 분석과 마찬가지로 인간의 사고 작용의 양면이며 선후이다. 따라서 이 두 사고 작용은 상호 보충적 관계에 있다고 할 수 있다.

이 사실은 수학적 분야에서도 마찬가지이다. 넓은 뜻의 수학적 사고는 증명적 추론에 귀착되지 않으며, 형식적인 증명만으로 성립되는 것이 아니다. 개연적 추론과 함께 무엇을 어떻게 증명하면 좋은가를 시사하는 사고 과정(직관)은 형식적

증명 그것과 마찬가지로 수학적 사고의 한 부분을 이루고 있다. 이 사실을 수학의 교수-학습에서 고려해야 하는 것은 특히 중요하다. 학생들이 이와 같은 "형식적이 아닌" 내용적인 추론에 대한 일정한 경험을 갖지 않는다면, 형식적이고 엄밀한 증명의 진정한 역할도 이해할 수 없다.

연역적으로 증명하여 수학적 엄밀성을 기하는 것은 직관적 또는 개연적으로 발견한 사실의 정당화에 지나지 않는다.

학생들은 엄밀성의 수준, 형식적 추론의 구조가 포함된 여러 사고 수준에서 자신의 능력에 맞는 수준에서의 증명을 발견하여 평가하고 분석하는 일을 배우지 않으면 안된다.

주12) Martin A. Simon, Beyond Inductive and Deductive Reasoning; The Search for a Sense of Knowing, Educational Studies in Mathematics, 30., 1996., pp.197 ~ 210.

주13) 수학 교과 내용으로서의 수학적 사고와 수학을 하는 방법으로서의 수학적 사고로 나누었을 때, 수학을 하는 방법으로서의 수학적 사고가 수학적 활동의 핵심이라는 것을 의미한다.

주14) NCTM, Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991., pp.1 ~ 11.

주15) 교육부, 고등학교 수학과 교육과정 해설, 1995., pp.95 ~ 103.

주16) 황우형 번역, 중등 수학교육의 일반적인 목표, Dynamics of Teaching: Secodary School Mathmatics, 대한수학교육학회, 1996년 동계 집중 세미나, 1996., p41.

주17) NCTM, Professional Standards for Teaching Mathematics, 전게서, pp.95 ~ 103.

주18) 이용률 외 공저, 수학교육론, 전게서, pp.42 ~ 43.

주19) 상게서

참 고 문 헌

[1] 안철호, 언어능력과 수학적 사고력과의 관계, 한국교원대학교 교육 대학원 수학교육 석사학위 논문, 1992,

[2] 교육학 사전 편찬 위원회, 교육학 대사전, 교육서관, 1987.

[3] Micheal H. Agar 저, 이용남외 공역, 민족지학이야기, 교육과학사, 1993.

[4] 학글학회 지음, 우리말 국어 사전, 어문각, 1992.

[5] 이용률 외 공저, 수학교육론, 교학연구사, 1994.

[6] Martin A. Simon, Beyond Inductive and Deductive Reasoning; The Search for a Sense of Knowing, Educational Studies in Mathematics, 30., 1996., pp.197 ~ 210.

[7] NCTM, Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991.

[8] 교육부, 고등학교 수학과 교육과정 해설, 1995., pp.95 ~ 103.

[9] Phares G. O'Daffer 외 공저, 서동엽 번역, 비판적 사고와 수학적 추론, 증명, 수학교육 연구 주제2, 대한수학교육학회, 1995년 하계 집중 세미나 논문집, 1995., pp.35 ~ 56.

[10] Douglas T. Owens 저, 류희찬 번역, 서론, 수학교육 연구 주제1, 대한수학교육학회, 1995.

[11] 서동엽 저, 증명 지도에 관한 연구, 대한수학교육학회 논문집 제1권 제1호, 1991., pp.123 ~ 135.

[12] 황우형 번역, 중등 수학교육의 일반적인 목표, Dynamics of Teaching: Secodary School Mathmatics, 대한수학교육학회, 1996년 동계 집중 세미나, 1996.