韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 프로시딩>
1997. 7. 제6집, 411-428.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Proceedings of Mathematical Education
Series E: July 1997, Vol. 6, 411-428.

수학적 지식 구성에서 추론의 역할

강미광(동의대)
이병수(경성대)
양규한(대연고)

현재 많은 구성주의자들은 학습자를 자신의 지식 구조를 세우는 건축가로 여기고 있으며(Wang, Haertel, Waldegg,1993. and Glenda,1996.) 학습자에 관한 관점이 지식의 수동적인 수용자라는 관점에서 능동적인 지식의 구성자로 보는 관점으로 바뀌어가고 있다. 즉, 구성주의자들이 구성주의를 여러 형태로 분류하고 있지만 그 구성주의들의 본질은 "학습자는 지식 구성에 있어서 수동적인 수용자가 아니라 능동적인 지식구성의 활동가"라는 관점이다[1].

이런 관점은 다음의 세가지 가정을 바탕으로 한다.

* 학습은 지식구성의 과정이지 단순한 암기나 기억이 아니다.
* 학습은 지식 의존적이어서, 현재의 지식을 사용하여 새로운 지식을 구성한다.
* 학습자는 인지 과정을 자각하고 그 과정을 통제 조절할 수 있다. 이런 자각이나 초인지가 지대하게 학습 과정에 영향을 준다.

von Glasersfeld는 구성주의의 기본적인 신조를 크게 다음 두가지로 보고 있다.

* 지식은 수동적으로 수용되는 것이 아니라, 능동적으로 인지하고 있는 주체에 의하여 세워지는 것이다.
* 인지의 기능은 순응적이다. 그리고 그것은 존재론적인 실재의 발견에 보다는 경험세계의 조직에 더 이바지한다.

위와 같은 관점에서 보면 구성주의를 이해하기 위해서는 "지식 구성의 원리" 를 이해할 필요가 있다. 그리고 지식 구성의 과정이나 인지 과정의 자각이나 그 과정의 통제 조절을 하는 메카니즘에 대하여 이해할 필요가 있다.

지식은 학습자의 앞선 지식에 의하여 조절과 동화를 통하여 또 다른 형태의 지식으로 구성되고 계속적으로 변형되어 가는 것이다. 획득된 개념은 추론을 거치면서, (그것

---

1) *Active Learning in a Constructivist Framework*, Glenda Anthony, Educ. stu. in Math., 31, pp.349-369, 1996.

은 전방향 추론일 수도 있고 후방향 추론일 수도 있다.) 다른 개념들과의 관계에서 모순율을 제거하게 된다. 이런 모순율의 제거로부터 필요한 정보나 필요한 개념을 갖게 된다. 이런 것들은 모두 학습자의 학습에 대한 능동성을 바탕으로 하고 있다.

지식 구성의 과정상 추론의 역할은 매우 중요한 위치를 차지하게 된다. 이런 추론의 중요성을 파악하고 그 본질을 이해하여 수학교실에서의 추론이 일반적인 수업의 과정으로 나타나게 할 필요성을 느낀다.

본 논문에서는 이론적인 고찰을 위주로 하여 여러 가지 형태의 추론을 살펴보고, 지식 구성의 능동성과 수동성을 비교하고, 그리고 구성주의에서의 추론의 역할을 찾아보고자 한다. 끝으로 수학적 지식 구성에 있어서의 추론의 역할을 알아보고자 한다. 먼저 사회적 구성주의의 지식 구성에 관한 심리적 기초를 살펴보자.

구성주의에 관하여

1. 구성주의의 심리적 기초

von Glasersfeld(1991)는, 지식의 자주적 구성이라는 것을 바로 Piaget의 '반영적 추상화'에서 가져왔던 것이다. Piaget는 추상화를 '경험적인(또는 물리적인)' 것과 '반영적인' 것의 두가지로 대별하였고, 경험적 추상화는 반영적 추상화에 포함되는 바, Piaget의 반영적 추상화는 경험적 추상화, 표상, 그리고 반성의 세단계로 이루어진다.

Piaget에 의하면, 경험적 추상화는 관찰 가능성에 관한 것이고, 반영적 추상화는 행동과 조작의 조정에 관련되어 있는 것이다.(Piaget et al, 1974) 그리고, 사람들은 외생적인 근거냐 내생적인 근거냐에 따라 이 두 가지의 추상화를 구별할 수 있다.(Piaget,1974)

경험적 추상화는 일반화로서의 추상화를 의미한다. 이것은, 경험으로부터 어떤 개념에 대한 일반적인 아이디어를 가질 수 있다는 것을 의미한다.

von Glasersfeld(1991)는 일련의 경험이 일단 고립되기만 하면, 일반화로서의 경험적 추상화가 가능하다고 보았다. 그리고 그 결과로 생긴 인지구조를 '개념'이라고 부를 수 있다고 하였다. 이와 같이 경험적 추상화의 과정은 경험에서 관찰 가능한 그 무엇이 최초로 '인식'되는 과정이다.

von Glasersfeld(1991)에 따르면, 처음의 경험이 그것의 재구성을 이끌어 낼 아무런 흔적도 남기지 않는다면, 어떠한 정신적 표상 활동도 가능하지 않다. 여기에서의 표상

은 선행 경험의 재생성 이상도 이하도 의미하지 않는다. 그는, 지각 영역에서 사물의 인식 능력이 표상 능력을 동시에 그리고 자동적으로 수반하는 것으로는 생각하지 않았다.

반성이란 내용이 형식으로 전환되는 과정[2]이라 할 수 있다. 이때, 이 형식은 내용에서 분리된 것으로, 내용을 다루는 행동 또는 조작이 조정된 결과로 나타나는 것이다.

반영적 추상화의 세부적인 단계인 경험적 추상화, 표상, 반성의 메커니즘은 '균형화'와 '확대균형화'로 설명될 수 있다.

균형화의 특징은, 어떤 균형 상태도 마지막 도달점이 아니고, 항상 지나쳐서 더 안정된 균형으로 나아간다는 것이다. 즉, 인지적 균형화는 본래 상태로의 복귀가 아니고, 항상 확대적인 것이다. 이것이 바로 확대 균형화이다. 그리고, 이와같이 차례로 균형화가 되풀이되는 것에 의해서 학습자는 새로운 지식을 획득해가는 것이다.

경험적 추상화의 과정은, 경험에서 개념이 인식되는 과정인데, 이 과정에서 관찰 가능한 것으로의 내용이 분리된다. 이러한 과정은, 말하자면 대상의 어느 속성이 관찰 가능한 것으로서 주체의 인지 체계 속으로 전입되는 과정이라고 할 수 있다. 여기서 인지 체계 속으로 전입된다는 것은, 안정된 상태에 있었던 인지 체계가 주체의 행동이 대상에 작용하는 순간 불안정한 상태가 되고, 그리고 관찰 가능한 속성의 전입에 의해 다시 안정된 상태에 이르게 되는 것으로 파악할 수 있다.

이와 같은 확대 균형화가 바로 경험적 추상화의 메커니즘이라 할 수 있다. 그런데, 표상과 반성 역시 인지 체계가 불안정한 상태에서 안정 상태로 바뀌는 과정이라 할 수 있는 바, 그런 이유에서 표상과 반성의 메커니즘 역시 확대 균형화라고 할 수 있다. 그러나, 경험적 추상화, 표상, 반성의 세 단계에서의 확대균형화의 양상은 서로 다르다. 확대 균형화의 양상 또한 다르다는 것은, 각각의 확대균형화에서 미시적으로 계속해서 이루어지는 균형화의 양상이 다르다는 것을 의미한다. 이것은, 구체적인 경험에서 관찰 가능한 것으로서의 내용을 분리해 내는데 작용하는 동화-조절의 양상과, 관

2) 반영적 추상화를 분명하게 이해하기 위해서는 '형식'과 '내용'에 대하여 고찰할 필요가 있다. 내용은 경험에서 분리된 것으로 관찰가능하고, 그리고 점차 고유한 가치를 가지게 되는 것, 즉 경험의 재생을 가능하게 해주는 것이다. 형식은 내용에서 분리된 것으로, 내용을 다루는 행동 또는 조작의 '조정(coordination)'과 관련이 있는 것이며, 다시 새로운 경험의 대상이 된다(박영배,1996).

찰 가능한 것으로서의 내용에서 형상화된 내용 즉, 경험을 다시 재생해 낼 수 있는 것으로서의 내용으로 전환하는데 개재되는 스킴의 동화-조절의 양상과, 그리고 형상화된 내용에서 그 내용을 다루는 행동이나 조작을 내면화-상징화-언어화한 형식으로 전환하는데 개재되는 스킴의 동화-조절의 양상이 서로 같을 수 없다는 점에서 분명하다고 할 수 있다[3].

경험적 추상화, 표상, 반성의 메커니즘은 확대 균형화이다. 그리고 그것은 다시 수많은 균형화로 이루어지며, 이러한 균형화에는 기본적으로 세 가지 형태가 있다. 그러나, 이러한 세 가지 서로 다른 형태의 균형은 결국 동화와 조절 사이의 균형으로 귀착됨을 알 수 있다. 왜냐하면, 주체와 대상 사이의 균형은 대상의 스킴에의 동화, 그리고 다시 스킴의 그 대상에의 조절 사이의 균형을 의미하기 때문이다. 스킴의 동화 경향과 마찬가지로 하위 인지 체계에도 이러한 동화 경향이 존재한다. 그러나, 하위 인지 체계는 그 유래도 그리고 형성 수준도 각각 다르기 때문에 적절한 상호 동화가 용이하지 않으며, 그 과정에 많은 내적 부정합을 수반하게 된다. 그래서 하위 인지 체계 사이의 균형도 동화와 조절 사이의 균형임을 알 수 있다. 한편, 하위 인지 체계의 상위 인지 체계로의 통합은 그 두 인지 체계에 공통인 구조에의 동화이다. 그리고 상위 인지 체계의 하위 인지 체계로의 분화는, 하위 인지 체계의 특수성에 응하는 조절을 필요로 한다는 의미에서, 이러한 균형도 결국 동화와 조절 사이의 균형이라고 할 수 있다[4].

구성주의에서는 주체에 의한 지식의 구성이 근본적으로 동화와 조절이라고 하는 스킴의 두 기능에 의해서 수행되어 진다고 할 수 있는 것이다. 그러나, 지식의 이러한

---

3) 균형화에는 적어도 세 가지 형태가 있음을 알 수 있다. 첫 번째는, 구체적인 경험에서 관찰 가능한 것으로의 내용을 분리해 내는 과정에서 볼 수 있는 균형화이다.
두 번째는, 관찰 가능한 것으로서의 내용에서 형상화된 내용 즉, 경험을 다시 재생해 낼 수 있는 것으로서의 내용으로 전환하는 과정에서 볼 수 있는 균형화이다.
세 번째는, 형상화된 내용에서 그 내용을 다루는 행동이나 조작을 내면화-상징화-언어화한 형식으로 전환하는 과정에서 볼 수 있는 균형화이다(박영배,1996).

4) 구성주의자들은 인지 발달이 동화의 성공에 의해서가 아니라, 동화의 실패에 의해서 촉진된다고 보았다. 이 실패가, 변칙적인 것이 결국에는 과학 공동체를 위기로 몰아 넣는다는 Kun(1970)의 설명에서 볼 수 있듯이, 바로 균형을 깨뜨린다. 이러한 균형파괴에 대해 변화를 시도하여 균형을 유지하려는 스킴의 능력이 바로 조절이다(박영배,1996).

심리학적 구성에는 사실상 지식의 객관성에 관한 논의가 수반되지 않았음을 알 수 있다. 사실상 지식의 객관성, 특히 주관독립적인 의미에서의 객관성에 대한 논의를 거부하고, 대신 공통주관적인 의미에서의 객관성을 받아 들인다면, 지식의 객관적 구성을 이와 같이 심리학적으로 설명하는 것이 가능해진다. 따라서, 구성주의의 이러한 심리학적 기초를 전제로 하면, 그것은 스킴의 수정에 의한 교수-학습을 수용한다는 것을 의미한다고 할 수 있다. 그리고 이것은, 갈등 국면에서 균형 회복을 위해 동화와 조절에 의한 새로운 스킴의 구성이 요구되고, 그리고 그러한 스킴의 구성을 통해 수학의 교수-학습이 이루어지도록 배려한다는 것을 의미한다. 즉, 갈등 상황의 해결을 위해 노력하는 학생들로 하여금 새로운 스킴을 구성할 수 있도록 해주는 교수-학습 환경을 설정할 필요성이 있음을 의미한다.

2. 학생들의 수학적 지식 구성을 돕는 Expert로서의 교사

교사를 통하여 학습자가 학습을 진행한다면 교사는 하나의 숙련자로서 역할을 하여야 한다. 수학적 지식의 100% 확신을 주게 하려면 교사는 학생에 대한 이해 뿐만아니라 수학 교과 내용에 대한 충분한 지식을 소유하여야 한다. 이것은 또한 구성주의 견해에서도 교사의 역할과 일치하는 것이다. 그러므로 숙련자로서의 교사의 학생의 학습에 대한 역할을 살펴 볼 필요가 있다.

학생은 능동적으로 수학적 내용을 학습한다하더라도 그것은 기본적인 방향제시나 학습과정에 대한 자율적인 조절과 통제를 넘어선 초인지에 대한 부분이 존재하게 된다.

그리고 필요한 지식을 찾아내는데에 있어서 숙련자를 필요로 하게 된다. 그것은 지식전달자로서의 교사를 의미하는 것이 아니라 지식 안내자로서의 혹은 탐색기능자로서의 교사를 학생들은 필요로 하게 된다. 숙련자인 교사를 통하여 학생들은 학습을 자율적으로 수행하고, 그 숙련자에게서 필요한 정보를 탐색하여 필요한 것은 취하게 된다. 이런 과정에서 추론을 이용하게 된다. 전방향이든 역방향이든 추론을 하여 검색하고 그 검색된 자료를 갖고 다음 자료를 검색하게 된다.

역으로 교사의 입장에서는 학생들의 아이디어 관한 표상의 본성을 이해하여야 한다. 이것을 다루는 하나의 방법은 학생의 일반적인 개념에 대한 교사의 가능한 반응에 관한 레파토리를 강화하는 것일 것이다. 이 레파토리는 학생이 질문하거나 의견을 말할 때마다 자동적으로 반응을 (무의식적으로) 보이는 '기교의 가방'으로써 역할을 할 필요는 없다. 오히려, 그 레파토리는 교사가 반응을 세울 수 있는 풍부한 기초로써 역할을 하여야 한다. 학생들이 질문을 할 때마다 출발점에서의 시작하지 않으므로 해서 교사

는 훌륭한 교수의 다른 요소들에 주의를 기울일 수 있을 것이다. 교사들은 학생들의 사고와 개념, 그리고 그들의 사고에 도전하고 확장시키는 방법에 있어서의 반응하는 법을 이해할 필요가 있다. 그래서 의미로운 학습이 강조되어지고 수학적 개념의 강력한 구성이 양육되어 진다. 학생들에게 주어진 다른 반응에 반응하도록 함으로써 교사들은 그들 학생들의 사고와 그들 자신의 반응의 질에 관하여 많은 것을 배울 수 있다. 그 이상으로 학생들의 지식을 분명하게 할 뿐 아니라, 수학을 다루는 교실 상황의 학생들의 분석이 판단하고 타당화하고 다른 사람을 돕는데 대한 괄목할 만한 책임감을 가지고 학습자들의 공동체를 창조하는 잠재력을 가진다. 교사는 학생들에게 귀기울일 필요가 있고, 그들의 아이디어를 의미롭게 하도록 할 필요가 있다. 그렇게 하기 위해서, 교사들 자신은 학습자들의 공동체로써 구조화된 학습 환경을 경험하여야만 한다. 그래서 그들은 사람의 사고를 분명하게 하고 사고하는 방법의 레파토리를 확장시키는 데에 있어서 의사소통의 역할에 민감하게 된다. 게다가, 교사들은 서로 서로 이야기할 필요가 있다. 아이디어를 바꾸고 충고를 구하고 그리고 일원으로써 연구하도록 하기 위해서. 연구들은 교수-학습은 교사들 사이에 협동성이 있을 때 향상됨을 보이고 있다. 이것은 다만, 대화나 다자간 대화에로의 접목으로써만 얻어질 수 있다.

3. 지식 구성의 능동성과 수동성

학습에 관하여 능동성이라는 것을 어떻게 해석하여야 하는가? 두 가지의 일반적인 해석이 있을 수 있다. 첫 번째 사용은 능동적인 학습을 학습 활동의 방향의 괄목할 만한 자율성과 통제성이 학생들에게 주어지는 학습 활동으로 명명되는 것으로 여겨진다. 보통 이런 식으로 확인된 학습 활동은 탐구 학습, 문제 해결, 소집단 활동, 협동 학습과 실험 학습을 뜻한다. 대조적으로, 학생들이 정보에 대한 수동적인 수용자가 되는 수동적인 학습활동은 일련의 닫힌 질문들이 질문되어지면서 교사의 설명을 듣고 그리고 이미 나타나있는 연습과 응용을 듣는 것을 뜻한다.

Kyriacou와 Marshall(1989)은 능동적인 학습이라는 용어의 두 번째 사용은 똑같이 중요하다고 주장하고 있다. 이 경우에, 능동적인 학습은 통찰을 증가시키는 것으로 특징지어지는 학습 경험에 능동적인 지적 참여가 있는 학생들의 정신적 경험의 양을 뜻한다. 그것은 능동적인 지적 탐구의 태도이다. 이런 능동적인 학습의 개념은 정신적인 노력 또는 의도적인 학습, 유의미 학습 그리고 초인지의 개념들을 안고 있다. 첫째번 정의에서 처럼, 능동적인 학습의 이런 형태는 기억과 훈련을 통하여 새로운 지식을 동화하는데 역점을 두는 것으로 특징지어지는 학습 경험에서 수동적인 지적인 참여에

대조될 수 있다.

Kyriacou와 Marshall은 능동적인 학습의 이런 두 가지 차원은 각각 서로 독립적임에 동의한다. 능동적인 학습 활동은 능동적인 정신 경험이나 수동적인 정신 경험을 육성시킬 수 있고, 마찬가지로 수동적인 학습 활동이 능동적인 정신적 경험이나 수동적인 정신적 경험을 육성시킬 수 있다. 그리하여 그런 것은 필연적으로 구성적임에 틀림없다. Noddings은 학생들이 단순한 암기 학습 상황으로 보이는 곳에 처해 있을 때조차도, 그들은 구성한다라고 말하고 있다. 그러나 학습 결과는 질적으로 다를 수 있다 하더라도, 몇몇 활동은 강력한 구성이라기보다는 약한 구성을 내포한다.

교과과정상으로 고무되는 능동적인 학습의 본성은 학생들이 요구되는 수학적 이해를 배워야만 한다면, 결과적으로 구성의 강한 활동이 되는 능동적인 정신적 경험과 연합되는 것은 중요하다. (Herrington, 1990) 몇몇 교사들은 학생들에게 수많은 조사, 끝이 개방된 문제 해결 경험, 그리고 이런 경험으로부터 학생들이 성공적으로 지식을 구성하리라는 기대를 갖고 활동에 조력을 제공함으로써 그릇된 안정감 속으로 젖어 들 수 있다.

수학적 추론에 관한 개괄

1. 추론의 의미와 기능

고전 논리학의 체계를 완성한 아리스토텔레스는 논리적 추론을 이끌어내는 법칙을 사고법칙이라 하였고 여기에는 개념, 판단, 추리의 3요소가 사고 활동의 요소가 된다고 하였다. 사고 활동의 요소로서 개념은 문제해결을 위해 필요로 하는 과거의 경험, 지식, 정보 등이 현재의 정신작용에 파고드는 것이다. 판단은 문제해결의 아이디어를 가지게 하는 것으로 대상을 비교, 분석, 종합하는 사고작용에서 얻어지며, 추리는 개념, 판단에 의한 기초 밑에 실제로 문제를 해결해 나가는 방법으로 귀납추리, 연역 추리, 비교추리를 의미한다.

그러므로 문제해결이나 수학적 명제와 정리에 대한 이해 등에서 반드시 논리적 추론이 필요하게 된다.

Micheal H.Agar는 민족지학적 관점에서, "추론을 함으로써 서로 다른 지식의 단편들이 연결되고 지식은 세계와 연결된다. 내가 어떤 것을 알고 있거나 혹은 관찰하면 다른 것도 알게 된다고 주장할 때마다, 나는 추론을 하고 있는 것이다."라고 하면서 추

론의 기능을 이야기하고 있다. 그는 계속해서 "추론개념은 기억으로부터 혹은 세상과의 상호작용에 의해 형성되는 지식을 연결해주는 것을 나타낸다. 추론은 마디와 그들을 연결해주는 연결부로 구성된다. 추론은 그럴듯함 혹은 제약의 정도에 따라 주장되고, 그들이 상호 연결되는 현상 유무를 포함할 수도 있다. 마디는 행위, 상태, 사람, 목표 혹은 대상일 수 있다. 가장 단순한 형태의 추론은 두 개의 마디 연결을 주장하는 것이다."라고 추론에 대하여 이야기하고 있다.

그렇다면 수학적 추론이란 무엇인가? 수학적 사고가 아이디어를 이해하고, 그 아이디어 사이의 관계들을 발견하고, 그 아이디어와 그들의 관계에 대한 결론을 이끌어내거나 지지하도록 하고, 또한 그 아이디어를 포함하는 문제를 해결하도록 하기 위하여, 수학적으로 풍부한 사고 기술을 사용하는 것을 말하며, 수학적 추론이란 일반화하고 아이디어들과 그아이디들이 어떻게 관련되는가에 관한 타당한 결론을 이끌어내는 수학적 사고의 일부분이다.

이상에서 살펴 본 추론은 다음과 같이 그 기능을 분류할 수 있다.

① 추론을 통하여 선 개념으로부터 새로운 개념을 형성할 수 있다.
② 추론을 통하여 선 개념과 새로운 개념과의 관련성을 찾을 수 있다.
③ 추론을 통하여 Experts와의 상호작용에서 새로운 개념을 형성할 수도 있다.
-즉, 교과서나 교사로부터 주어지는 개념을 이해할 수 있게 되는 추론을 의미한다.
④ 추론을 통하여 Experts로부터 타당성 찾을 수도 있다.
⑤ 추론을 통하여 두 개 이상의 개념으로부터 통합된 하나의 개념을 형성할 수도 있다.
⑥ 개념과 개념의 연결성을 통한 새로운 세계의 이해를 위하여 추론을 필요로 한다.
⑦ 추론은 의사소통을 가능하게 한다.
⑧ 일반화, 추상화, 구체화, 표상화 등을 하기 위해서는 추론을 필요로 한다.
⑨ 추론을 이해하기 위하여 다른 추론을 필요로 하는 경우가 있다.

2. 수학적 추론의 형태

수학적 추론의 형태를 살펴보자. '어떤 집합의 몇 개의 원소에 대한 정보를 이용하여 그 집합의 다른 원소 또는 모든 원소에 대한 일반화를 형성하는 수학적 추론'인 귀납적 추론과, '타당한 추론 패턴을 이용하여 전제로부터 결론을 이끌어내는 수학적 추론'인 연역적 추론을 들수 있다. 즉,귀납적 추론은 특수한 예들로부터의 일반적인 결론의 도출을 의미하고, 연역적 추론은 필연적으로 따르는 추론의 논리적인 연쇄로 도출

되는 결론을 의미한다.

귀납적 추론에서 특수한 몇 개의 예로부터 일반화하여 갈 때, 그 일반화를 이루게 하는 나머지 원소들의 속성을 학생들은 추측하고 그 추측의 정당성을 고려하여야 한다. 여기서 학생들의 어려움이 있다. 즉, 원래 주어진 예들의 집합과 나머지 부분의 예들인 여집합에 대한 관찰과 추리를 필요로 하기 때문이다. 그리하여 잘못된 결론을 도출하여 낼 수도 있다.

연역적 추론에서는, 참인 전제에서 출발하여 추론을 할 때, 그 추론이 타당하다면 그 결론은 참이고, 역으로는 그 추론을 이용하여 도출되는 어떤 결론도 참이 되면 그 추론은 타당한 추론이 된다. 여기에서 학생들의 추론에서 오류가 발생할 수도 있음을 짐작할 수 있다. 즉, 추론은 타당하지 못하더라도 참인 전제에서 참인 결론을 학생들은 도출하기도 한다. 그리하여 학생들은 잘못된 추론을 통하여 얻은 결론이 참인 경우에는 그 추론의 잘못을 인식하지 못하고 지나치게 될 것이다. 그러므로 교수의 상황에서 올바른 추론 연습의 필요성을 느끼게 된다. 올바른 추론 연습으로서의 교수-학습상황이라고 하더라도 그것이 엄밀한 수준의 증명만을 의미하는 것은 아니다. 증명을 하여야 할 때에도 학생의 수준에 적절한 엄밀성으로 증명을 하는 것이 학생의 학습에 도움이 됨을 여러 연구를 통하여 알 수 있다. 증명을 하는 이유 중의 하나는 주어진 개념이나 문제의 구조 이해를 위한 것이다. 그것은 엄밀한 증명 과정을 통하여 이루어지는 것일까 하는 것에 대한 하나의 답이 될 수 있다.

귀납적 추론과 연역적 추론이 수학적 일반화와 타당성을 탐색하기 위한 것이라면 반면에 수학적 대상의 구조에 대한 통찰이나 이해를 위한 추론으로서 유비추론과 변환적 추론을 들 수 있다.

유비에 의한 추리(유추)란 엄밀하지는 않지만, 하나의 수학적 대상이나 대상들의 집합이 지니는 성질을 그와 구조상 유사한 다른 대상에도 그 성질을 가지고 있으리라고 추측하는 것으로써 귀납의 경우와 마찬가지로 그 결론이 일반적으로 확실한 것이 아니고 개연적인 것에 지나지 않으며 가정, 추측이란 성격을 지닌다. 이런 특징으로 인하여 유추는 때때로 귀납적 추리에 포함시키기도 한다. 이리하여 수학적 이론의 수단을 다른 것에 적용시키는 것이 가능하다는 것이 유추의 특성이 성질이 다른 수학적 대상 사이의 깊은 유사성에 바탕을 둔다는 것으로 설명이 가능하지만, 그러나 유비에 의한 풍부한 추론이 될만한 유사성을 찾아낸다는 것은 비교되는 대상의 성질이 비슷한 경우에도 쉽지 않을 수도 있다. 두 대상에 대한 깊은 연구를 통하여 발견에 이르

는 원천이 될 구조적인 유사점을 찾아낼 수 있게 한다. 이와같이 유추에 의해서 판단한다면 하나의 대상에서 새로운 성질을 발견할 수도 있다. 그 발견된 성질은 증명을 통하여 타당화된다.

유비 추론이나 귀납적 추론은 창조력을 기르는 중요한 추론 방식이다. 또한 문제 해결의 과정에 있어서도 유추나 귀납에 의하여 일정한 절차를 밟아 해결의 단서를 찾고, 적절한 착안점을 택해서 처리하고 해결함으로써 수학상의 중요한 사실이나 어려운 문제의 해결이 이루어진 것을 쉽게 찾아볼 수 있다.

변환적 추론은 대상들이 겪는 변환들을 가시화하게 하는 대상(이나 대상들의 모임) 위에서의 작용소(나 작용소들의 모임) 그리고 이런 작용들의 결과들의 모임의 정신적 활동이나 육체적 활동이다. 변환적 추론에서 중심적인 것은, 고정된 상태가 아니라 하나의 상태나 상태들의 연속체가 만들어내는 역동적인 과정을 고려하는 능력을 말한다. '정신적 활동'은 정신적 상에서 수행되어지는 작용소들을 말한다. 변환적 추론의 결과는 종종 '성립(work)하는 방법의 이해에 관한 감각'을 의미하고 그 결과로써 대상의 구조에 대한 통찰을 보이는 것이다.

변환적 추론은 Piaget와 Inhelder의 변환적인 재생산적 상이나 예기되는 상에 의하여 지지된다. 각 경우에 문제해결자는 작용으로부터 변환적 결과를 가시화할 수 있다.

이 변환적 추론은 귀납적 추론 및 연연적 추론 둘 다에 중첩된다. 몇몇 귀납적 전략들은 결과들을 수집하기 위하여 '블랙박스'를 작동하는 것과 유사할 수 있으며 반면에, 몇몇 귀납적 전략들은 포함되어 있는 변환의 작동의 이해를 이끌어낸다. 유사하게, 연역적 논증이 그 현상의 본질에 관한 통찰을 보이지 않고도 타당성을 결정하는 반면에, 다른 것은 관련된 변환의 기제를 분류한다.

또한 귀납적이지도 않고 연역적이지도 않은 변환적 추론의 영역이 있다.

효과적인 문제 해결은 변환적, 귀납적, 연역적 추론의 조화로운 사용을 함의한다. 이 변환적 추론이 수학적 아이디어를 이해하고 타당화하기를 모색하는 인간(학습자)의 자연스런 성향이다.

종합적으로 학생들은 유비추론이나 변환적 추론에 의하여 대상의 구조를 통찰하고, 귀납적 추론을 통하여 개념을 종합하고, 연역적 추론을 통하여 개념을 분류한다고도 볼 수 있다. 귀납적 추론은 다소 불확실성을 가지고 있지만 창조적이고 활동적이다. 한편으로 연역적인 추론은 다른 사람에게 확신을 시키는 가장 타당한 추론 방법이지만 합의에 의해 나아가는 선적인 구조로 인하여 발전성이나 비약성에는 다소 부족한

점도 있다.

다소 직관적이긴 하지만, 변환적 추론을 사용할 때, 학생들은 주어진 문제 상황을 자기 나름으로 이해하고 변환적으로 추론하는 경향이 있다. 학생들은 자신의 지식을 바탕으로 하기 때문에 변환적 추론의 결과를 별로 의문없이 받아 들일 수도 있다. 귀납이나 변환적으로 추론을하여 아이디어를 발견하고 (문제 상황의 경우에는 문제 뜻을 파악하고) 그 발견된 것에 대하여 연역적인 추론을 통하여 학생 자신의 수학적 신념체계나 지식 체계를 재구성하도록 하여야 한다. Simon의 이야기처럼, 변환적 추론은 '성립하는 방법의 이해에 관한 감각'이지 그것 자체가 증명을 의미하는 것은 아니다. 귀납적 추론, 연역적 추론 및 변환적 추론의 조화로운 사용으로 학생들의 수학지식 구성에 효과적인 도움을 줄 수가 있을 것이다.

3. 수학적 추론을 사용하고 있는 수학 교실

수학 교실에서 학생들은 대부분 결함이 있는 추론을 하는 경우가 대부분이다. 그 추론의 결함은 기본적인 수학적 개념의 부족과 추론의 부족에서 오는 경우가 대부분이다. 이런 결함을 추론을 통하여 제거하려면, 또 다른 추론을 통하여야 한다. 또한 그 추론의 애매함으로 인하여 개념의 윤곽만을 갖고 있는 경우에도 우리는 학습 가능성을 갖고 교사의 안내자적인 역할에 의하여 좀더 엄밀한 개념으로 이끌어 간다. 여기서 어느 정도의 수준에서 학생들에게 추론의 엄밀함을 강조할 것인가? 그리고 학생들이 어느 수준에서 추론을 하고 있는지 판단할 것인가? 추론의 근거가 교사, 교과서 등을 매개체로하여 학습자가 필요한 것을 어떻게 추출하여가는 가를 이해할 필요가 있다.

수학 교실에서 학생들이 하는 추론은 엄밀한 수학적 추론만을 한다고 할 수 있는가? 그리고 수학교실에서 교사가 학생들에게 엄밀한 추론만을 강조하여 추론케 하여야 하는 당위성은 무엇인가? 만약 학생들이 엄밀하지는 않더라도 다소 그럴싸한 추론을 한다면 그 추론을 이해하여 개념 획득이나 문제의 구조 파악을 위하여 교사가 하여야 하는 일은 무엇인가? 기본적으로 학생들이 하는 추론이 엄밀하지는 않더라도 그것은 학습을 위하여는 매우 유용한 것이므로 교사가 그것을 이용하여 보다 나은 방향으로 인도하여 가야 할 것이다. 이것이 교사가 하는 안내자적인 활동이다. 예를 들어, 평균값 정리를 학습하는 수학교실에서 학생들에게 엄밀한 증명을 요구하는 환경을 제공한다고 하자. 그 때 학생들은 증명을 할 수는 있을지 모르지만(그것은 수동적인 학습활동으로 보일 것이다.) 학생들은 결코 평균값 정리가 무엇을 말하는지 알 수가 없을 것이다. 즉, 엄밀한 증명만으로 그 정리에 대한 구조를 통찰하게 하는데는 실패할

수도 있는 것이다. 그 증명을 하기 전에 학생들에게 구조 파악을 하도록 다른 다양한 표상을 사용하여 보이는 것도 학생들의 개념 이해에 효과적일 뿐만 아니라 그것이 학생들의 개념에 대한 표상 형식에도 어울릴 것이다.

의미로운 학습 활동을 통하여 보다 엄밀한 수준의 추론으로 이끌어져가는 과정 중에서도 학생은 지식을 구성한다고 할 수 있다. 추론을 사용하고 있는 교실의 예를 보자.

수학적 귀납법" [1] $f(1)$: 참이고, [2] $f(k)$: 참이면 $f(k+1)$:참이 된다. 그때, 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 참이다"를 학습하는 교실 수업 상황을 설정하여 시나리오를 만들어 보자.

교사: ("[1] $f(1)$: 참이고, [2] $f(k)$가 참이면 $f(k+1)$:참이 된다. 그때 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 참이다"를 칠판에 적고난 뒤) 이런 증명법을 수학적 귀납법이라고 합니다. 오늘은 이 수학적 귀납법에 관해서 공부하여 봅시다. 이 수학적 귀납법의 원리를 설명이나 증명할 수 있는 사람?(잠시 학생들에게 생각을 하도록 지시한다. 잠시후 한 학생이 질문을 한다.)

학생A: $f(1)$이 참이고, [2]식에 의하여 $f(2)$도 참이 됩니다. 또한, $f(2)$가 참이므로 $f(3)$도 참이 됩니다. (잠시 머뭇거린다) 같은 원리로 계속하여 가면, 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 참이 됨을 알 수 있습니다.

교사: 잘 하였습니다. (학생)A의 의견을 여러분은 어떻게 생각합니까?

학생X: '천리길도 한 걸음부터'라는 우리나라 속담이 있듯이 하나씩 하나씩하여 가면 결국 그렇게 되는 것이 아닐까요?

교사: 응? 그렇다면 더 먼 길도 가능할까요?

학생들: 그렇지 않을까요? 당연히 그렇게 될 것 같은데요.

교사: 직관적으로는 그럴 수밖에 없을 것 같지요? 그런데, 우리는 매우 큰 자연수 n에 대하여도 성립한다고 어떻게 보장할 수가 있을까요?

학생B: $f(1)$이 참이므로 [2]식에 의하여 $f(2)$도 참임을 알 수 있습니다. 그리고 $f(3)$도 참이고 …(잠시 머뭇거린다.) 예, 일렬로 보도 블록을 깔아놓고, 첫 보도 블록부터 한 발에 하나씩의 보도 블록을 밟고 지나가게 한다면 아무리 많은 보도 블록이라도 끝까지 모두 밟을 수 있습니다. 그래서, 수학적 귀납의 원리가 성립함을 알 수 있습니다.

교사: 예! 보도블럭을 일렬로 놓고 차례로 밟아 간다면 모두 밟고 지나간다는 아주

기발한 아이디어를 갖고 있군요! 그럼, (학생)B의 의견에 여러분은 어떻게 생각합니까? 동의합니까?

학생들: 예!

학생C: 선생님, 저는 이렇게도 생각해 보았습니다. 일렬로 세워진 도미노가 있을 때, 하나의 도미노 $f(k)$가 넘어지면 다음 도미노 $f(k+1)$가 넘어지도록 하였을 때, 제일 앞 도미노 $f(1)$을 넘어 뜨리면 아무리 많은 도미노라도 넘어집니다. 그러므로 수학적 귀납의 원리가 성립함을 알 수 있다고 봅니다.

교사: 예! 정말 잘 했습니다. 이제 여러분은 수학적 귀납법의 원리에 대하여 충분히 이해를 한 것 같군요. 지금까지 발표한 학생들의 의견들은 "수학적 귀납법"의 증명으로써 우리는 받아 들일 수 있을까요?

학생들: …

교사: 지금까지의 의견들은 "수학적 귀납법"의 구조에 대한 이해라고 볼 수 있지요. (학생)A의 의견은 증명으로서 미흡하겠지요? 왜냐하면, 매우 큰 수에 대하여 성립한다는 것을 우리는 어떻게 알 수 있나요. 여러분들은 수학적 귀납의 원리를 충분히 이해하고 있는 것 같군요. 이제 "수학적 귀납법"에 관한 증명을 해 보도록 합시다. 누구 증명을 할 수 있는 사람?

학생E: 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 참인 것은 아니라고 가정할 때, $f(1)$이 참이므로 $f(n)$ 이 참이 되지 않는 2 이상인 최소의 자연수N이 존재한다는 것을 알 수 있습니다. 그때, f(N-1)이 참이 되어서는 안됩니다. 이것은 N의 최소성에 모순이 됩니다. 그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 참이 되어야 합니다.

교사: 훌륭하게 잘 했습니다. (학생)E의 증명을 정리하여 봅시다. 먼저번에 "$p \Rightarrow q$"와 동치가 되는 식은 무엇이지요?

학생들: "$\sim p \vee q$"입니다.

교사: 맞아요. 그것을 부정하면 어떻게 되지요?

학생K: "$p \wedge \sim q$"가 됩니다.

교사: (지금까지의 이야기를 칠판에 적어면서) "$p \Rightarrow q$"와 동치인 식은 "$\sim p \vee q$"이고, 그것의 부정은 "$p \wedge \sim q$". "$p \Rightarrow q$"을 증명한다는 것은 "$p \wedge \sim q$"가 '모순명제'임을 보이면 되겠지요. 그 원리를 이용하여 (학생)E는 "수학적 귀납법을

증명한 것입니다. 알겠지요?

학생들: 예!

교사: 그런데, 우리는 여기서 주의해야 할 것이 있어요. 증명이라고 하는 것은, 증명하고자 하는 것의 결과q를 이야기하는 것이 아니라, “$p \Rightarrow q$”라고 하는 문장 전체를 말하는 거예요. 그 이유는 증명이라는 것이 추론을 의미하기 때문이예요. 그렇다면, 이제 변형된 수학적 귀납의 원리에 대하여 공부하여 봅시다. [2]식을 “$f(n)$이 참이면 $f(n+2)$가 참이다”로 바꾸면, [1]식은 어떻게 바뀌어야 할까요?([1]식은 공란으로 두고 [2]식을 변형하여 칠판에 적는다. 잠시후 학생D를 지적한다.)

학생D: (잠시 망설이다가) $f(n)$이 참이 되지 않는 최소의 자연수N에 대하여 f(N)이 참이 아니면 f(N-2)은 참이 아닙니다. 그리고, f(N-1)은 …음.(망설인다.) 예, N이 짝수이면, $f(2)$가 참이어야 하고, N이 홀수이면, $f(1)$이 참이어야 합니다. $f(1)$혹은 $f(2)$가 참이다? $f(1)$과 $f(2)$가 참이다? (잠시 후) 예, 도미노를 홀수 번째는 오른쪽에, 짝수 번째는 왼 쪽에 놓고 모두 쓰러 뜨릴려면, 양쪽 맨 앞에 것을 쓰러 뜨려야 하므로, 답은 $f(1)$과 $f(2)$가 모두 참이어야 합니다.

학생A는 귀납적 추론인 유추를 하고 있다. $f(3)$까지 참인 것을 찾고는 그 다음 부터는 같은 구조라고 느끼고 유추를 하고 있다. 아직 학생A는 수학적 귀납법의 구조 내에서 그 체계를 보고 있다. 그러나 학생B의 경우는 처음에 귀납적 추론을 하다가 수학적 귀납법의 구조를 파악하게 되었다. 그리하여 변환적 추론을 불러오게 되어 보도블록을 생각하게 되었다. 학생C의 경우는 처음부터 수학적 귀납법의 원리를 파악하고 그 구조 밖에서 사고를 하고 있다. 즉, 변환적 추론을 하고 있다. 그리하여 도미노의 원리와 수학적 귀납법의 원리가 같음을 알고 있다. 학생E는 처음부터 연역적 추론으로 그 체계를 타당화하고 있다. 그러나 학생E는 수학적 귀납법의 원리를 완전히 이해하고 있다고 할 수는 없다. 그가 알고 있는 ‘부정’을 이용한 연역적 증명법을 사용함으로써 그 구조의 절차적인 측면만을 타당화하고 있다고 볼 수 있다. 학생B,C와 학생E를 비교하여 보면 차이가 있음을 알 수 있다. 수학적 귀납법을 이용한 증명에서 학생B,C가 학생E에 비하여 성공적일 것이라고 추측할 수 있다. 끝부분에서 교사가 그 구조를 일부 변경시킴으로써 학생들에게 그 구조에 대하여 파악을 하도록 하고 있다. 학생D의

경우는 학생E의 연역적 추론을 하다가 구조를 파악하게 된다. 그리하여 변환적 추론을 하게 된다. 도미노의 구조를 일부 변경시킴으로써 수학적 귀납법의 원리를 타당화하고 있다. 위의 교실 상황에서 보면, 학생A,B,C,D는 수학적 귀납법의 원리의 구조를 파악하고 있다고 볼 수 있다. 학생E의 경우는 구조를 파악하고 있는지 알 수는 없다. 학생B,C,D는 수학적 귀납의 원리의 구조 밖에서 유사한 구조를 형성하고 있다. 그러나 학생A는 그 구조 내에서만 그 구조를 보고 있다. 여기에서 학생B,C,D는 변환적 추론을 하고 있다.

위의 예에서는 변환적 추론을 사용하기 전에 그 구조체계를 올바르게 파악한 경우이다. 그러나 어떤 학생은 그 구조체계를 잘못 파악하고 변환적 추론을 사용할 수도 있다. 학생X는 수학적 귀납의 원리의 구조를 파악하고는 있지만 그 구조를 정확하게 꿰뚫어 보지 못하고 있는 것 같다. 즉, 속담의 뜻에서는 식[1]을 강조하고 있고, 식[2]의 작용 원리에 대해서는 변형이 가능할 수도 있다. 학생X는 변환적 추론을 사용하고 있지만 주어진 구조를 제대로 파악하지 못하고 있는 경우이다. 그렇다고 그것이 가치가 없는 것은 아니다. 변환적 추론 자체는 수학적 영역의 범위를 확장시켜 주기 때문이다. 그리고 Simon의 이야기처럼 학생들은 이런 추론을 통하여 수학의 구조를 이해하려는 경향이 있기 때문이다. 불완전하기 때문에 학습이 이루어지고 창조적이되며, 발달이 이루어지기 때문이기도 하다.이런 추론들을 이해하고 활용할 수가 있다면 우리는 기꺼이 그렇게 하여야 한다.

수학적 지식 구성을 위한 활동

수학교육학적 구성주의의 관점에서 볼 때, 수학 지식의 구성을 위한 강력한 활동의 특징은 (Confrey,1990)

① 내재적 일관성의 측도를 갖는 구조
② 다양한 개념에 걸친 종합
③ 표상의 복합적 형태와 문맥 사이의 수렴
④ 계속하여 반성하고 설명하는 능력
⑤ 역사적 연속성
⑥ 다양한 기호 체계로의 결합
⑦ 전문가에 대한 동의
⑧ 보다 나은 구성을 위해 하나의 도구로서 행동하는 잠재력

⑨ 미래의 행동을 위한 안내

그렇다면 수학교육학적 관점에서 볼 때, 이러한 특징을 갖는 강력한 활동을 학생들이 수학 교수-학습에서 실제적으로 할 수 있도록 하기 위해서, 교사는 학생들을 어떻게 고무할 수 있는가? : (Confrey의 진술)

교사는 수학적 문제와 개념의 설정, 구성, 탐구, 해결, 정당화를 위한 강력한 수학적 구성의 레퍼토리를 학생 한사람 한사람이 개발하도록 격려하고 고무해야만 한다. 그리고 또한 학생들이 그 구성의 질에 대하여 반성하고 평가하는 역량을 개발할 수 있도록 도와주어야 한다. 그리고 이러한 목적을 위해서는 다음 세 개의 가정을 받아들여야 한다.

① 교사는, 수학에 대한 학생의 이해가 어떻게 이루어지는지, 그 모델을 구안해야 한다. 그러기 위해서 교사는 학생의 지식 구성의 강도를 판단하기 위한 증거를 수집하는 가능한 한 다양한 다양한 방법을 창조할 필요가 있다. 그 각각의 방법은 결국, 각 학생에 대한 사례 연구가 될 것이다.

② 교수-학습은 본래가 상호 작용적이다. 교사는, 학생들의 교과지식에 대해 학생들과 상호작용을 하는 가운데, 임시 경로를 만들게 되는데, 학생들은 이 경로를 따라 이미 받아들인 수학 지식에 부합하는 수학적 아이디어를 구성할 수 있게 된다. 그러나, 교사는 이미 학생들의 구성이 그들 자신의 구성과 일치하지 않을 수도 있다는 개연성에 대비하고, 학생들이 자신의 신념을 표현할 수 있도록 고무해야 한다. 그렇게 함으로서 교사는 학생들의 신념을 이해하게 되는 것이다. 그런 후에야 비로소, 교사는 그들 자신의 신념을 수정하거나 또는 상호 간에 수용할 수 있는 대안(그런데, 그 대안은 수학적인 실행에 대한 협정을 승인할 수도, 그렇지 않을 수도 있다.)을 찾기 위해 학생과 협상할 수 있는 것이다. 만약, 학생이 분명히 타당한 논거가 결여된 대안을 주장한다면, 교사는 자신의 판단을 바탕으로 하여,그 학생의 주장이 합리적이지 못함을 단호히 알려 줄 필요가 있다.

③ 궁극적으로는, 학생들 스스로 자신의 지식 구성이 타당한지 아닌지를 판단해야 한다.

궁극적으로 지식 구성의 타당성을 판단하는 도구는 추론이다. 추론을 통하여 지식 구성의 결핍성을 판단하여 보완하고 갈등 국면을 해소하게 된다. 이것이 지식구성의 일면이다. 지식구성에서의 추론의 역할을 살피기 위해서는 먼저 지식의 객관성에 관하여 알아 볼 필요가 있다.

급진적 구성주의가 지식의 객관성을 주관독립적으로 보았기 때문에 지식의 객관성은 존재하지 않는 것으로 여겼다. 여기에서 교사가 학생들이 지식을 구성하도록 하는데 있어서의 안내자적인 역할을 하는데에 대한 문제점이 발생하게 되었다. 이것을 보완하여 사회적 구성주의는 지식의 객관성을 모든 사람들의 공통주관적인 "합의"의 개념으로 보았다. 그것은 다소 지식의 객관성이라는 표현보다는 객관화라는 표현이 어울릴 수도 있다. 공통주관적인 "합의"를 객관으로 받아들인다면 합의를 도출하기 위하여 개인이나 집단이라는 변인과 도구적인 의미의 의사소통에 대하여 살펴볼 필요가 있다.

하나의 개념에 대하여 각자의 견해와 다른 사람들의 견해를 서로 비교하고 그런 비교를 통하여 합의를 도출하고자 한다면 의사소통은 필수불가결하다.의사소통에서 중요한 것은 자기 자신의 생각이나 개념을 표출하여 정당화를 시켜야 하고 다른 사람의 생각이나 개념을 정확게 파악하고 그것이 자신의 생각이나 개념과 일치가 되지 않으면 타협 또는 조정하여야 한다. 의사소통을 하는 과정들은 추론을 바탕으로 하고 있는 것이다. 그리고 그 의사소통을 거치면서 지식을 하게 된다.

효과적인 의사소통을 위해서는 개인의 개성이 존중되어야 하고 의사소통할 만한 가치가 있는 활동이어야 하며 (그것은 개인의 인지체계 내에 있고 대상에 대한 관심을 불러올 수 있는 것이어야 한다는 것을 의미한다.) 각 개인은 자기 자신의 내부에 반영적 추상화가 이루어져야 하며 이를 위하여 교사는 발문 중심적 상호작용이 되도록 하여야 한다.

추론이 일반적인 형태로 이루어지는 학습 환경에서 의사소통은 효과적일 것이다. 연역적 추론만을 강요하는 상황에서보다는 다양한 추론을 통하여 지식은 구성된다고 볼 수 있다. 또한 그런 다양한 추론의 형태에 맞는 표상의 개발과 학습 전략의 수립이 지식 구성을 극대화시킬 것이다.

제 안

학생들에게 능동적인 학습활동을 고무시켜 수학적 지식을 구성할 수 있도록 돕는 숙련자로써 교사는 추론을 일반적인 수업 내용으로 제공하여야 한다. 학생들의 추론을 이해하고 아이디어에 관한 표상의 본성을 이해하며 교과내용에 대한 깊은 통찰을 가지고 학생들과 상호작용하며 수학적 대상의 구조에 대한 통찰을 가시화시킬 수 있는 과제 제시와 수학에 대한 긍정적인 메타인지를 갖도록 하는 추론의 힘을 인식하게 하도록 하여야 한다.

참 고 문 헌

[1] Active Learning in a Constructivist Framework, GLENDA ANTHONY, Educ.stu. in Math., 31: pp.349-369, 1996.

[2] Toward a Working Model of Constructivist Teaching: A Reaction To Simon, LESLIE P.STEFFE and BEATRIZ S.D'AMBROSIO,

[3] Constructivism and mathematical education, L.MORENO-AMELLA and G.WALDEGG, INT.J.MATH.EDUC.SCI.TECHNOL., 1993., vol 24. no 5. pp.653-661.

[4] 박영배, 수학 교수-학습의 구성주의적 전개에 관한 연구, 서울대학교 박사 학위 논문, 1996.

[5] Some aspects of teachers' and students' views on student reasoning and knowledge construction, RUHAMA EVEN and ZVIA MARKOVITS, INT.J.MATH.EDUC.SCI.TECHNOL., 1995.,vol.26, no.4, pp.531-544.

[6] Values, gender and images of mathematics: a philosophical perspective, PAUL ERNEST, INT.J.MATH.EDUC.SCI.TECHNOL.,1995,vol.26,no.26,pp.449-462.

[7] Radical constructivism and mathematics education, LESLIE P.STEFFE and THOMAS KIEREN, Journal for Research in Mathematics Education, 1994., vol.25,no.6,pp.711-733.

[8] 교육학 사전 편찬 위원회, 교육학 대사전, 교육서관, 1987.

[9] Micheal H. Agar 저, 이용남외 공역, 민족지학이야기, 교육과학사, 1993.

[10] 학글학회 지음, 우리말 국어 사전, 어문각, 1992.

[11] 이용률 외 공저, 수학교육론, 교학연구사, 1994.

[12] Martin A. Simon, Beyond Inductive and Deductive Reasoning; The Search for a Sense of Knowing, Educational Studies in Mathematics, 30., 1996., pp.197 ~210.

[13] NCTM, Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991.

[14] Phares G. O'Daffer 외 공저, 서동엽 번역, 비판적 사고와 수학적 추론, 증명, 수학교육 연구 주제2, 대한수학교육학회, 1995년 하계 집중 세미나 논문집, 1995., pp.35 ~56.

[15] Douglas T. Owens 저, 류희찬 번역, 서론, 수학교육 연구 주제1, 대한수학교육학회, 1995.

[16] 서동엽 저, 증명 지도에 관한 연구, 대한수학교육학회 논문집 제1권 제1호, 1991., pp.123 ~135.