GÖDEL의 증명에서의 對角線論法

李 鍾 權

머 릿 말

Kurt Gödel은 1931년 自然數체계의 일관적이면서도 완전한 公理化(consistent and complete axiomatization)가 불가능하다는 定理를 발표했는데 이를 흔히 그의 제 1 정리[1]라고 한다. 이 정리에서 Gödel은 Euclid이래 數學에서 모범시 되어온 公理的 방법에 依한 數學 理論 체계의 수립에 결정적인 한계가 있음을 입증함으로써 당시 수학계에 일대 충격을 던졌다.

Gödel은 이정리를 증명하는데 있어 직접적인 증명방식을 채택하여 自然數체계를 형식화한 어떠한 공리체계에서도 증명이 불가능하며 동시에 眞인 문장을 구성하는 방법이 있음을 보였다. Gödel의 문장이라고 부르는 이 문장은 일종의 自己指示的(self-referent)인 문장이다. Gödel은 Liar의 逆理 및 Richard의 逆理와 자신의 증명간의 類似性에 대해 언급하고 있는데[2] 이는 Gödel 문장이 Liar의 역리에 등장하는 문장과 마찬가지로 자기지시적이며 이 같은 자기 지시성이 Richard의 역리의 경우처럼 對角線논법에 따라 얻어졌음을 의미하는 것이다.

本稿에서는 對角線과정이 Gödel문장을 구성하는데 어떤 역할을 하고 있는가에 초점을 마추어 Gödel 문장을 구성하는 논리적인 전개과정을 설명해 보고자 한다. 이설명은 Gödel의 증명에서 對角線논법이 동원되는 부문에만 국한될 것이므로 완전한 Gödel증명에는 이르지 못한다. 그러나 대신 Gödel 증명의 기본 발상을 이루는 Liar 및 Richard의 逆理에서 Gödel의 증명에 이르는 논리적인 전개과정을 연속성있고 일관성 있게 설명함으로써 난해한 Gödel의 증명의 논리적 구조를 분명하게 파헤치는데 역점을 둘 것이다. 그러기 위해 Gödel의 방법을 보다. 일반화하여 自然數체계만이 아닌 일반적인 의미체계에서 自己指示的인 문장을 얻어내는 방법을 검토한 다음 그 결과를 自然數체계에 적용하여 Gödel의 문장을 유도해 낼 것이다.

---

1) 自然數 理論에 대한 形式體係(formal system)의 일관성(consistency)를 이 체계내에서 증명하는 것이 불가능하다는 정리를 보통 Gödel의 제 2 정리라고하는데 이하에서 Gödel 정리라고 할때는 제1 정리를 지칭하는 것으로 한다.

2) Gödel (1931) 1節

§1. 對角線 논법

대각선 논법[3]은 集合論의 창시자인 G. Cantor가 實數의 集合과 自然數의 集合사이에는 1대 1 대응 관계가 성립할 수 없으며 따라서 實數는 셀수 없을 정도로 많다는 것을 증명하기 위해 창안 해낸 논법이다. Cantor의 논리는 어떠한 셀수 있는 실수의 집합이 주어져도 이 集合에 속하지 않는 실수를 對角線 방법이라고 부르는 특정한 방식에 따라 구성해 낼수 있다는 것이다. 이 對角線 방법은 集合論뿐만 아니라 Gödel의 증명과 밀접한 연관을 갖는 Richard의 역리에서도 중요한 역할을 하는 논법이므로 이를 개관해 볼 필요가 있다.

0과 1사이에 있는 實數의 集合 $R=\{x$는 실수 $|0<x\leq 1\}$은 實數전체의 집합의 부분 집합이므로 實數 전체가 셀수 없음을 증명하는 대신에 集合 R이 셀수 없음을 보이면 충분하다. 그런데 R의 元素는 無限소수로 一義的인 방법으로 표시할 수가 있다. 이 실수들은 특히 2進法의 무한소수로 표시해도 一義的으로 나타낼 수 있으므로 이것들을 편의상 2진법으로 표시하기로 한다.

지금 S를 R에 속하는 실수들로 이루워진 셀수 있는 集合이라고 가정하자. S는 가정에 따라 自然數 집합과 1대 1 대응시킬수 있다. 이 대응 관계에 의해 自然數 i와 짝 지워지는 S의 원소를 r_i라고 하고 이것이

$$r_i=0.\ a_1^i\ a_2^i\cdots\cdots a_j^i\cdots\cdots$$

와 같은 無限소수로 표시 됐다고 가정하자. 이때 R의 원소를 모두 2진법으로 표시하기로 했으므로 a_j^i는 모두 0 또는 1이다. 이때 우리는 R에는 속하면서도 S에는 속하지 않는 實數 $\bar{D}(S)$를 다음과 같이 구할수 있다. 우선

$$\bar{D}(S)=0.\ a_1a_2\cdots\cdots\ a_n\cdots\cdots$$

이라고 하고 a_n을 다음과 같이 정의한다.

$$a_n=1-a_n^n \tag{1-1}$$

즉, $\bar{D}(S)$의 소수 n자리 숫자는 n에 대응되는 S의 원소의 소수 제 n 자리 숫자가 1일 경우는0이며 0일 경우는 1이 된다. 이 $\bar{D}(S)$를 S의 對角化(diagonalization)라고 한다. $\bar{D}(S)$는 명백히 0과 1사이에 있으므로 R에 속한다. 그러나 S에는 屬하지 않는다. 만약 $\bar{D}(S)$가 S에 屬한다고 하면 S의 원소중 $r_k=\bar{D}(S)$인 r_k가 存在하지 않으면 안된다. 이 경우 모든 n에 대해

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^k \\ &= 1-a_n^n \end{aligned} \tag{1-2}$$

이어야 한다. 그러나 $n=k$일 경우

$$a_k^k=1-a_k^k \tag{1-3}$$

3) 이하는 Wilder (1952)가 설명한 (제 4 장) 대각선 논법을 본 논문의 목적에 맞게 약간 수정한 것이다.

이것은 모순이다.

여기서 주의할 것은 集合 S에 $\bar{D}(S)$를 첨가하여 새로운 셀 수 있는 集合 S'를 만들어도 S'은 역시 R이 될 수 없다는 사실이다. 왜냐하면 S'에 또 다시 대각선 방법을 적용해 $\bar{D}(S')$을 만들면 이것은 여전히 R에 속하면서도 S'의 원소는 되지 않기 때문이다. 이는 곧 임의의 셀수 있는 實數의 集合이 확정된 것으로 주어져 있을 경우 이 集合의 對角化에 의해 이 集合에 속하지 않는 實數를 항상 구할수 있으며 따라서 實數 전체의 集合은 셀수 없다는 사실을 의미한다.

對角線논법에서 핵심적인 부분은 (1-1)에 의해 S의 對角化 $\bar{D}(S)$를 구하고 또 (1-2)에서 (1-3)을 유도해 내는 과정이다. Richard의 역리 및 Gödel의 증명에서도 이와 대응되는 과정이 반복해서 등장할 것인데 우선 Richard의 역리에서 대각선 논법이 어떻게 응용되는가를 알아 보기로 하자.

§2. Richard의 역리[4]

Richard의 역리는 自然數 체계를 기술하는데 사용되는 특정언어 L을 對象으로 한다.

言語 L의 alphabet의 數가 有限할 경우 이 alphabet를 有限個 연결하여 만든 單語나 이 單語들을 有限個 연결하여 구성한 구절(clause)들은 셀수 있을 만큼 無限하다. 따라서 이들 구절 중에서 순전히 自然數의 성질의 정의하는 述語가 될 수 있는 구절들, 예컨데 L을 한글이라 가정 했을 경우, '두 수의 곱이 되는 자연수'라든가 또는 다른 수로 나누어 떨어지는 수'와 같은 구절들도 셀 수 있을 만큼 무한할 것이다. 이들 自然數의 성질을 정의하는 술어들의 集合에 自然數의 집합을 대응시키고 이 술어들을 대응되는 自然數의 크기에 따라

$$R_1(n),\ R_2(n),\cdots\cdots R_i(n),\cdots\cdots$$

과 같이 늘어 놓기로 한다. 다음 이 술어들를 이용하여 술어 $R(n)$을

$$R(n) =_{df} \sim R_n(n) \qquad (2\text{-}1)$$

과 같이 정의하자. R은 즉 위에서 말한 R_i의 집합과 自然數 集合간의 대응관계에 의해 그것에 대응되는 술어가 정의하는 성질들을 갖지 않는 自然數들 그리고 오직 그같은 自然數들만이 갖는 성질을 나타내는 술어이다. 임의의 自然數 n은 R_n가 아닐 경우 또 오직 그 경우에 限해 R이다. 이 R을 Richard 술어라고 한다.

Richard술어는 自然數의 성질을 정의하는 술어이므로 위의 $R_i(n)$중 어느 하나와 같지 않으면 안된다. 지금 $R(n)$가 $R_k(n)$와 같다고 하면 모든 n에 대해

$$R_k(n) \Longleftrightarrow \sim R_n(n)^{5} \qquad (2\text{-}2)$$

4) 이하는 Richard의 역리에 관한 Nagel & Newman (1960)의 설명(pp. 60~63)을 토대로 한 것이다.
5) 기호 '⇔'는 양변이 동시에 성립하거나 또는 동시에 성립하지 않는다는 것을 의미하는 기호이다.

여기에 n대신 k를 대입하면

$$R_k(k) \Longleftrightarrow \sim R_k(k) \tag{2-3}$$

이것은 모순율에 배치된다.[6]

Richard의 역리와 Cantor의 대각선 논법과의 관련을 살펴보기 위해 위의 논의를 다른 각도에서 검토해 보기로 한다.

술어 $R_i(n)$에 대응되는 특징함수(characteristic function)를 $\phi_i(n)$이라고 하면

$$R_i(n)\text{가}\begin{cases}\text{眞일 경우 } \phi_i(n)=1\\ \text{僞일 경우 } \phi_i(n)=0\end{cases}$$

술어 $R_i(n)$가 셀수 있을만큼 많다면 $\phi_i(n)$도 셀수 있을 만큼 많아야 한다. 지금 $\phi(n)$을

$$\phi(n)=1-\phi_n(n) \tag{2-4}$$

와 같이 정의하면 $\phi(n)$은 $R(n)$의 특징 함수가 되며 식(2-4)는 식(2-1)의 특징함수화에 해당하게 된다. $\phi(n)$는 $\phi_i(n)$ 중에 存在하지 않는다. 왜냐하면 $\phi(n)$을 $\phi_k(n)$과 같다고 할 경우

$$\phi_k(n)=1-\phi_n(n) \tag{2-5}$$

여기에 n대신 k를 대입하면

$$\phi_k(k)=1-\phi_k(k) \tag{2-6}$$

이것은 모순이다. 식(2-5)와 (2-6)은 각각 식(2-2)과 (2-3)의 특징 함수화에 해당한다. 이상의 논의는 함수치를 0 또는 1로 갖는 自然數 함수가 셀수 없이 많다는 것, 그리고 Richard의 역리는 이 사실과 表裏의 관계에 있음을 의미하고 있다.

그런데 함수 $\phi_i(n)$의 각 自然數에 대한 함수값들의 배열

$$\phi_i(1),\ \phi_i(2),\ \cdots\cdots,\ \phi_i(j),\ \cdots$$

는 各項이 0 또는 1인 數列이라고 생각할 수 있다. 이 數列의 j번째 項 $\phi_i(j)$를 2진법으로 표시된 어떤 소수의 소수점이하 j번째 자리 숫자라고 생각하면 $\phi_i(n)$은 0과 1사이에 있는 어떤 소수, 即 §1에서 언급한 R의 한원소와 대응시킬 수 있으며[7] 따라서 $\phi_i(n)$함수들의 集合 $\{\phi_1(n),\ \phi_2(n), \cdots,\ \phi_i(n), \cdots\}$에는 R의 元素들로 이루워진 셀 수 있는 集合 S를 대응 시킬 수 있다. 이 경우 위의 식(2-4)는 S의 對角化 $\bar{D}(S)$를 구하는 식(1-1)과 정확히 대응되며 (2-5)와 (2-6)도 각각 (1-2) 및 (1-3)과 비교가 된다.[8]

---

6) Richard 역리의 논의의 초점은 (2-1)에 依한 술어 $R(n)$의 정리를 과연 앞에서 말한 '自然數의 성질을 정의하는 술어'의 정의로 볼 수 있느냐 하는 점이다. $R(n)$의 정의는 이른바 H. Poincaré, 의 impredicate 定數에 해당한다. 그러나 Richard 역리가 어디서 기인한 것이며 그것이 어떻게 해결될 수 있는가 하는 것은 本稿의 목적과 관계가 없으므로 이 문제에 대해서는 더 이상 논의 하지 않기로 한다.

7) 같은 요령으로 함수치를 0 또는 1로 갖는 모든 自然數 함수에 R의 원소를 하나씩 대응시킬 수 있으며 또한 역으로 R의 원소의 각각에 대해서도 그같은 함수를 하나씩 대응시킬 수 있는데 이는 곧 實數集合과 自然數 함수들의 集合의 갯수(cardinal number)가 서로 같다는 것을 말하는 것이다.

8) $\phi_i(j)$를 a_j^i로 고쳐쓰면 식 (2-4), (2-5), (2-6)은 각각 식 (1-1), (1-2) 및 (1-3)이 된다.

이상의 결과에 의해 Cantor의 증명과 Richard의 역리에는 모두 동일한 논리, 즉 對角線 논법이 바탕을 이루고 있음을 알 수 있다.

§3. 決定不可能文章의 存在가능성에 관한 Gödel의 논증

3.1. Liar의 역리와 '僞'로 부터 '증명 불가능'으로의 轉換

Gödel의 문장은 자기 지시적인 문장인데 자기 지시적인 문장이 등장하는 대표적 例는 Liar의 역리이다. Liar역리의 논리적 구조는 다음과 같이 설명될 수 있을 것이다.

지금 A를 자신에 對해 僞라고 주장하는 문장이라고 정의하자. A는 即 'A는 僞이다'라는 사실을 의미하는 문장이다. 여기에 Tarski의 도식

X는 眞$\Leftrightarrow p$(X는 文章 'p'의 이름)

을 적용하면

A는 眞$\Leftrightarrow A$는 僞

라는 결론이 나오는데[9] 이것은 모순이다.

그런데 여기서 '僞이다'라는 술어를 '증명불가능 하다'라는 술어로 바꾸고[10] 다음을 가정하면 Liar의 역리와 같은 모순에 빠지지 않고 결정 불가능한 명제를 얻을 수 있게 된다.

(A) 僞인 문장은 모두 증명이 불가능하다(False sentences are unprovable).

(A)를 만족하는 체계를 의미 론적으로 일관적인(semantically consistent)체계라고 부르기로 한다.

지금 G를 'G는 증명 불가능 하다'라는 사실을 의미하는 문장이라고 하자. G는 즉 자신이 증명할 수 없음을 주장하는 자기 지시적인 문장이다. Liar의 역리의 경우와 마찬가지로 G에 Tarski 도식을 적용하면

G는 眞$\Leftrightarrow G$는 증명 불가능 (3-1)

(3-1) 관계를 만족시키는 文章을 Gödel 문장이라고 정의하기로 한다. (3-1)에 의해 G는 眞이면서 증명이 불가능 하거나 또는 僞이면서 증명이 가능하거나 둘중의 하나이어야 한다 그러나 G를 포함하는 체계가 의미론적으로 일관적이면 假定(A)에 依해 僞이면서 증명이 가능한 경우는 배제된다. 따라서 이경우 G는 眞이면서 증명이 불가능한 문장이 되지 않으면 안된다.

그런데 G가 眞이면 $\sim G$는 僞가 되므로 가정(A)에 依해 $\sim G$ 또한 증명 불가능 하게 되며 G와 $\sim G$가 모두 증명이 불가능 하므로 G는 결국 결정 불가능한 문장이라는 결론이 된다.

---

9) A는 'A는 僞이다'와 같은 의미이므로 A는 眞$\Leftrightarrow$'A는 僞이다'는 眞. Tarski 도식에 의해 'A는 僞이다'는 眞 $\Leftrightarrow A$는 僞이다. 이둘을 종합하면 A는 眞 $\Leftrightarrow A$는 僞.

10) 이하 '僞'로부터 '증명 불가능'으로의 轉換에 관한 설명은 Kleene (1952) §42에 따른 것임.

이상의 논의를 요약하면 다음과 같이 말할 수 있다.

어떤 의미론적으로 일관적인 체계가 (3-1)을 만족하는 문장, 즉 Gödel문장을 포함할 경우 이체계는 다음 두가지 의미에서 불완전(incomplete)하다.

(i) 이 문장은 眞이면서도 증명이 불가능하다.

(ii) 이 문장은 자신은 물론 자신의 否定(negation)도 증명될 수 없다.

Gödel의 문제는 自然數체계안에서 (3-1) 관계를 만족시키는 문장 G를 구성하는 과정이라고 말할 수 있다.

G가 결정 불가능한 문장이 될 수 있는 것은 우선 그것이 자기 지시적인 문장이기 때문이다. 그러나 G가 자신에 대해 僞임을 주장하는 문장이라면 Liar의 역리와 같은 모순을 초래한다. 반면 증명 불가능을 주장할 경우에는 결정 불가능한 문장이 된다. G의 결정불가능성은 즉 첫째 G의 自己指示性과 두째 자신에 대한 증명 불가능성 주장, 두가지 요소에서 비롯되는 것이다.

앞서 우리는 자신이 증명불가능하다고 주장하는 문장을 구하면 이 문장은 (3-1)의 관계를 충족시키게 된다는 것을 보였는데 Gödel은 Richard의 逆理에서 '僞'로 부터 '증명불가능'으로의 轉換을 행하여 自然數체계내에서 그같은 自己指示的인 문장이 어떻게 구성될 수 있는가를 보이고 있다.

3.2. Gödel의 논증

Gödel은 Richard와 마찬가지로 自然數체계내의 모든 식(expression)들의 集合이 셀수 있는 集合이라는 사실로 부터 출발한다.[11] 모든 식들이 셀수 있을 많큼 많다면 어떤 특정한 變數 n을 단하나의 自由變數로 갖는 개방문장(open sentence)들도 셀 수 있을 만큼 많을 것이다. 이같은 개방문장들을 단순히 술어라고 부르기로 한다. 이들 술어에 自然數를 대응시키고 대응되는 自然數의 크기대로

$$F_1(n),\ F_2(n),\ \cdots\cdots,\ F_i(n),\cdots\cdots$$

와 같이 늘어 놓기로 한다.

Richard의 역리는 이 술어들 가운데서

$$\text{'}F_n(n)\text{은 僞이다'} \tag{3-2}$$

와 동일한 술어를 찾아 낼수 없다는 데서 비롯된 역설이었다. 그러나 위에서 '僞이다'를 '증명불가능하다'로 바꾼

$$\text{'}F_n(n)\text{은 증명 불가능하다'} \tag{3-3}$$

와 동일한 술어는 위의 $F_i(n)$의 배열內에서 存在할른지도 모른다. 이같은 술어가 存在한

11) Gödel은 自然數 체계 內의 식들을 셀 수 있는 실제적(effective)인 방법으로서, 各식들에 서로 다른 自然數를 대응시키는 구체적인 함수 관계를 도입했는데 이를 Gödel의 自然數 대응함수 (Gödel's n umbering)라고 부른다. Gödel의 自然數 대응함수에 관해서는 §5를 참조할 것.

다고 假定하고 그것을 $F_k(n)$이라고 하면 모든 n에 대해 $F_k(n)$은 (3-3)을 의미하게 된다. 여기에 Tarski 도식을 적용하면, 모든 n에 대해

$$F_k(n)\text{은 眞} \Leftrightarrow F_n(n)\text{은 증명 불가능} \tag{3-4}$$

(3-4)에서 n대신에 상수 k를 대입하면

$$F_k(k)\text{는 眞} \Leftrightarrow F_k(k)\text{는 증명 불가능} \tag{3-5}$$

(3-5)는 $F_k(k)$가 (3-1)의 관계를 충족시키고 있음을 보여 주고 있다. 따라서 $F_k(k)$는 自然數체계의 Gödel 문장이되며 自然數체계가 의미론적으로 일관적인한 이 체계는 $F_k(k)$를 결정불가능한 문장으로 하는 불완전한 체계가 된다.

$F_k(k)$를 구하는데 對角線과정이 어떻게 응용되었는가는 특징 함수로 이용해 설명하면 더욱 명확히 들어난다.[12]

지금 $F_i(n)$의 특징 함수를 $\phi_i(n)$이라고 하면

$$F_i(n)\text{가}\begin{cases}\text{眞이면} & \phi_i(n)=1\\ \text{僞이면} & \phi_i(n)=0\end{cases}$$

Richard의 역리는 함수 $\phi_i(n)$ 배열의 對角化

$$\phi(n)=1-\phi_n(n) \tag{3-6}$$

이 $\phi_i(n)$의 어느 것과도 다르다는 데서 비롯된 모순이다. (3-6)은 술어 (3-2)의 특징 함수이다.

다음 술어

'$F_i(n)$은 증명불가능하다'

의 특징함수를 $\psi_i(n)$이라고 하면

$$F_i(n)\text{가}\begin{cases}\text{眞이면} & \psi_i(n)=1\\ \text{僞이면} & \psi_i(n)=0\end{cases}$$

이 경우 $\psi_i(n)$의 對角化

$$\psi(n)=1-\psi_n(n) \tag{3-7}$$

은 (3-3)의 특징함수가 된다. $\phi(n)$이 $\phi_i(n)$의 배열가운 데서는 存在하지 않는 것과 마찬가지로 $\psi(n)$도 $\psi_i(n)$의 배열가운데서는 찾을 수 없다. 그러나 $\phi_i(n)$의 배열내에서는 $\psi(n)$가 存在할 가능성이 배제되지 않는다.

$\psi(n)$가 $\phi_i(n)$ 중에서 存在한다고 가정하고 그것을 $\phi_k(n)$이라고 하면

$$\phi_k(n)=1-\psi_n(n) \tag{3-8}$$

여기에 n대신 k를 대입하면

$$\phi_k(k)=1-\psi_k(k) \tag{3-9}$$

12) 특징 함수를 이용한 Gödel증명의 설명은 The Encyclopedia of Philosophy (MacMillan Inc.)의 "Gödel's Theorem"項에 바탕을 둔 것이다.

다음 의미론적인 일관성에 관한 假定 (A)를 특징 함수간의 관계로 고치면

$$(A)' \text{ 모든 } n\text{에 대해 } \phi_n(n) \geq \psi_n(n)$$

을 얻는다. (3-9)와 $(A)'$로부터

$$\begin{cases} \phi_k(k)=1 \\ \psi_k(k)=0 \end{cases}$$

이는 $F_k(k)$가 眞이면서도 증명불가능한 문장이라는 것을 말하고 있다.

식 (3-8)과 (3-9)는 각기

$$\text{모든 } n\text{에 대해 } F_k(n)\text{은 眞} \Leftrightarrow F_n(n)\text{은 증명불가능} \tag{3-4}$$

및

$$F_k(k)\text{는 眞} \Leftrightarrow F_k(k)\text{는 증명 불가능} \tag{3-5}$$

의 특징함수화에 해당한다. (3-5)는 $F_k(k)$가 Gödel문장임을 말하는 것으로 (3-4)에서 n대신 k를 대입해서 얻어진다. 이는 Gödel의 방식에 따라 自然數체계의 不完全性을 증명하는데는 (3-4)를 만족시키는 $F_k(n)$을 구하고 여기에서 n에 k를 대입하여 $F_k(k)$를 유도하는 것이 核心的인 과정이라는 것을 의미하는 것이다. 그런데 위의 설명에 의하면 (3-4)를 만족하는 $F_k(n)$는 다음 두단계를 거쳐 구해진다.

(i) '$F_n(n)$은 증명 불가능 하다'와 동일한 술어를 $F_i(n)$의 배열 가운데서 구한다음

(ii) Tarski 도식을 적용한다.

그러나 (i)에서 '$F_n(n)$은 증명불가능 하다'라는 술어는 $F_i(n)$들이 속하는 언어를 對象언어로 하는 메타언어에 속하는 문장이다. 그러므로 對象언어와 메타언어를 명확히 구분해야 한다는 관점에서 볼때 (i)의 조건을 만족하는 술어를 찾아낸다는 것은 불가능하다. 따라서 階型(type)이 다른 두 언어간의 混同을 야기하지 않고 그같은 술어를 구할수 있는 새로운 엄밀한 방법을 찾아 내지 않으면 안되는데 이를 위해 Gödel의 문제를 일반화하여 보다 일반적인 의미체계에서 자기지시적인 문장을 구하는 문제를 검토해 보기로 하자.

§4. Gödel의 對應函數와 Tarski문장

4.1. Gödel 對應函數

지금 체계 S에 기본기호들(primitive symbols)이 포함되 있으며 그 기본기호들은 또한 개별 변수(individual variable)와 개별상수(individual constant)로 이루워져 있고다 하자. 이 기본기호들이 有限個 연결되어 이루워진 식(expression)들 가운데서 이체계의 形成規則(rules of formation)에 依해 文章들이 정의된다. S에는 또 指示規則(rules of designation)과 眞理 規則(rules of truth)이 주어져 있어 이에 의해 각 문장의 의미와 眞理値가 주어지며 특히 S에서 眞인 문장들(sentences true in S)로 이루워진 集合 T가 정의된다. 이같은

조건을 갖춘 체계 S를 意味체계(semantic system)라고 부르기로 한다.[13] 체계 S에서 특히 일정한 변수 x만을 유일한 自由變數로 갖는 개방문장을 (1차의)술어 라고 부르기로 한다.

여기서 Gödel의 문제를 일반화시키기 위한 준비작업의 하나로 Gödel과 Richard가 自然數의 성질을 정의하는 술어에 서로 나른 自然數를 대응시킨 것과 마찬가지로 S의 모든 식에 대해 서로 다른 S의 개별 상수를 대응시키는 함수 관계를 도입키로 한다. S의 식 전체의 集合에서 개별 상수의 集合으로의 함수가 다음 두 조건을 만족한다고 하자.

(i) 서로 다른 두식에는 서로 다른 개별 상수가 대응된다.

(ii) 이 함수의 定義域(domain)은 모든 식의 集合이나 値域(region)은 개별상수들의 부분 집합(진부분 집합이건 아니건)이다. 그러므로 모든 식에 반드시 하나의 개별 상수가 대응되나 임의의 개별 상수에 대해서는 이에 대응되는 식이 存在하지 않을 수도 있다.

이 두 조건을 만족하는 대응 함수를 Gödel의 대응 함수(Gödel correspondance)라고 부르고 이것을 g로 표시하기로 한다. 또 g에 依해 식 E에 대응하는 개별 상수를 $g(E)$ 또는 「E」로 표시 하기로 한다.

여기서 Gödel의 대응 함수를 이용하여 몇가지 새로운 용어를 정의 하기로 한다.

S의 어떤 술어 $H(x)$와 식E에 대해H(「E」)가 S에서 眞일 경우 「E는 H를 만족시킨다」라고 말한다.

어떤 주어진 메타언어적인 술어 w에 대해 다음과 같은 의미에서 w에 대응되는 의미체계 S의 술어 $H(x)$가 存在한다고 하자.

$$S\text{의 모든식 } E\text{에 대해 } H(\ulcorner E \urcorner)\text{는 眞} \Leftrightarrow E\text{는 } w \qquad (4\text{-}1)$$

(4-1)은 E가 w로 표시되는 메타 언어적인 성질을 가질때 또 오직 그때에 限해 개별 상수 「E」가 H로 나타내지는 對象언어적인 성질을 갖는다는 것을 의미하는 것으로 Gödel의 대응 함수의 도입에 依해 메타언어적인 진술과 대상언어적인 진술간에 대응관계가 성립될수 있다는 가능성을 보여주고 있다. 그런데 w로 표시되는 성질을 갖는 모든 식의 集合을 W라고 하면 (4-1)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\text{모든 식 } E\text{에 대해 } H(\ulcorner E \urcorner)\epsilon T \Leftrightarrow E \epsilon W \qquad (4\text{-}2)$$

어떤 集合 W에 대해 (4-2)를 만족하는 S의 술어 $H(x)$가 存在할 때 W를 S에서 정의 가능한 集合이라고 말하고 H를 W를 정의하는 술어라고 칭하기로 한다. 다시 말해 集合 W는 W에 속하는 모든식 또 오직 그 식들만이 만족하는 S의 술어가 存在할때 S에서 정의 가능하다고 말한다. 어떤 集合의 S에서의 정의가능성은 물론 의미체계 S의 구조와 S에 도입된 Gödel 대응 함수에 좌우된다.

다음 술어 $H(x)$가 주어졌을 경우 H의 變數에 H의 Gödel대응 「H」를 대입한 문장 H(「H」)

13) 여기서 제시한 의미체계의 정의 및 아래에 나오는 Gödel대응 함수, S에서 정의 가능성(definability in S)에 관한 정의는 모두 Smullyan (1957)에 따른 것이다.

를 H의 對角化(diagnonalization)로 정의 한다. 對角化는 따라서 닫힌 문장(closed sentence)이 된다.

4.2. Tarski 문장의 유도

위에서 언급한 바와 같이 Gödel 문제는 Th를 의미체계 S의 定理가 아닌 식들의 集合[14]이라고 할 경우

$$G \epsilon T \Leftrightarrow G \epsilon \overline{Th}$$

을 만족시키는 G를 구하는 과정이라고 할 수 있다. 그러나 여기서 문제를 보다 일반화 하여 S의 임의의 식의 集合 W에 대해

$$X \epsilon T \Leftrightarrow X \epsilon W \tag{4-3}$$

를 만족시키는 문장 X를 구하는 방법을 고찰해 보기로 하자. (4-3)을 만족시키는 X를 集合 W에 對한 Tarski 문장[15]이라고 부른다. W에 대한 Tarski 문장은 곧 자신이 W에 속하는 문장임을 주장하는 자기 지시적인 문장이다. 따라서 Gödel문장은 곧 집합 $\overline{Th}$에 대한 Tarski문장이라고 할 수 있다.

우리는 앞서 §3에서 自然數체계내의 술어들 $F_i(n)$ 가운데 모든 n에 대해

$$F_k(n)\text{은 眞} \Leftrightarrow F_n(n)\text{은 증명 불가능} \tag{3-4}$$

을 만족시키는 $F_k(n)$을 발견 할 경우 $F_k(n)$의 대각화 $F_k(k)$가 이 체계의 Gödel 문장이 된다는 사실을 밝혔다. 위의 (3-4)에서 $F_k(n)$의 F와 k와의 관계를 Gödel 대응 관계로 파악하고 개별 상수를 그에 대응하는 식들의 Gödel對應으로 표시함으로써 (3-4)에서 $F_k(k)$가 유도되는 과정을 다음과 같이 일반화 할 수 있다.

지금 S의 식의 집합 W가 주어 졌다고 하자. 이때 모든 E에 對해

$$H_D(\ulcorner E \urcorner) \epsilon T \Leftrightarrow E(\ulcorner E \urcorner) \epsilon W \tag{4-6}$$

를 만족하는 S의 술어 H_D가 存在하면 H_D의 對角化는 W에 대한 Tarski 문장이 된다. 왜냐하면 (4-6)에서 E대신 H_D를 대입하면

$$H_D(\ulcorner H_D \urcorner) \epsilon T \Leftrightarrow H_D(\ulcorner H_D \urcorner) \epsilon W \tag{4-7}$$

(4-6)과 (4-7)은 각기 (3-4)와 (3-5)와 대응 된다.

여기서 그 대각화가 W에 속하는 모든 식 그리고 오직 그식들 만으로 이루워진 集合을 W의 對角集合이라고 정의 하고 이를 $D(W)$로 표시 하기로 하자. 정의에 依해 모든 E에對해

$$E \epsilon D(W) \Leftrightarrow E(\ulcorner E \urcorner) \epsilon W \tag{4-8}$$

(4-6)과 (4-8)을 결합 하면

$$H_D(\ulcorner E \urcorner) \epsilon T \Leftrightarrow E \epsilon D(W)$$

---

14) 集合 Th는 사실 의미체계 S가 공리화 되지 않는 限 정의되지 않는다. 이에 관해서는 §5에서 따로 설명할 것이다.

15) 이것은 Smullyan (1957)이 사용한 용어인데 아마도 Tarski의 眞理의 定義 不可能性(Indefinability of truth)에 관한 정리에서 이와 같은 문장의 存在여부가 중요시 되기 때문에 붙여진 이름일 것이다.

이는 H_D가 $D(W)$를 정의하는 술어임을 말하는 것이다. 이상의 결과를 종합하면 다음 정리를 얻게 된다.

정리 (Ⅰ) S의 식들로 이루워진 集合 W의 對角集合 $D(W)$가 S에서 定義가능 하면 W에 대한 Tarski 문장이 存在한다. H_D를 $D(W)$를 정의하는 술어라고 할 경우. H_D의 對角化는 W에 對한 Tarski문장이 된다.

우리는 앞에서 (3-4)를 만족시키는 술어 $F_k(n)$을 구하는 것이 Gödel 문장의 구성에 핵심적인 과정을 이룬다는 것을 지적 했는데 이와 마찬가지로 W에 대한 Tarski명제를 구하는데는 對角集合 $D(W)$를 정의하는 술어를 먼저 구하는 것이 가장 중요한 단계가 된다. 그런데 W의 對角集合을 정의하는 술어는 다음 두 조건이 충족될 경우 존재 한다.

(B) W는 S에서 정의 가능하다. 즉 모든 식 E에 대해

$$F(\ulcorner E \urcorner)\epsilon T \Leftrightarrow E \epsilon W$$

를 만족시키는 술어 $F(x)$가 存在한다.

(C) 의미체제 S의 임의의 술어 $H(x)$에 대해, 어떠한 식 E에 대해서도

$$H_D(\ulcorner E \urcorner)\epsilon T \Leftrightarrow H(\ulcorner E(\ulcorner E \urcorner) \urcorner)\epsilon T \tag{4-9}$$

가 성립하는 술어 H_D가 存在한다.

(4-9)를 만족시키는 H_D를 H의 對角술어(diagonalizer)[16]라고 정의 하기로 한다. 集合 W를 정의 하는 술어의 對角술어는 곧 W의 對角集合을 정의하는 술어가 된다. 따라서 (C)가 성립할 경우 임의의 集合 V에 대해 V가 S에서 정의 가능하면 그 對角集合 $D(V)$도 역시 정의 가능하게 되며 (B)와 (C)가 동시에 성립할 경우에는 W의 對角集合이 S에서 정의 가능하게 된다는 결론이 나온다.

(B)는 集合 W의 정의 가능성에 관한 條件인데 우리의 목적은 對角線논법이 Gödel의 증명과정에서 어떻게 응용되고 있는가를 고찰하려는 것임으로 이조건이 어느 경우에 충족되는가 하는 문제는 여기서 살피지 않기로 한다.

(C)의 성립여부는[17] 의미 체계S의 구조와 Gödel 對應函數에 좌우되는데 (C)가 성립하는

16) 이용어도 Smullyan (1957)의 정의에 따른 것이다.

17) Gödel은 불완전성 정리를 증명하기 위해 自然數이론에 관한 형식체계에서 다음을 만족하는 공식 $\underline{Pr}\ (\underline{x_1}, \underline{x_2})$와 $\underline{\mathrm{Sub}}\ (\underline{x_1}, \underline{x_2})$를 유도했다.

(Ⅱa) $\underline{Pr}\ (\underline{m}, \underline{n})$은 m이 Gödel數가 n인 식의 증명의 gödel數인 경우 또 오직 그 경우에 限해 증명 가능하다.

(Ⅱb) $\sim\underline{Pr}\ (\underline{m}, \underline{n})$은 m이 Gödel數 n인 식의 증명의 gödel數가 아닌 경우 또 오직 그 경우에 限해 증명 가능하다.

(Ⅲa) $\underline{\mathrm{Sub}}\ (\underline{m}, \underline{n}) = \underline{k}$는 k가 Gödel數가 n인 식에서 變數 $\underline{x}$대신 數字 $\underline{m}$을 대입해서 나온 식의 Gödel數 일때 또 오직 그때에 限해 증명 가능하다.

(Ⅲb) $\underline{\mathrm{Sub}}\ (\underline{m}, \underline{n}) \neq \underline{k}$는 k가 Gödel數가 n인 식에서 變數 $\underline{x}$대신 數字 $\underline{m}$을 대입해서 나온 식의 Gödel數가 아닐때 또 오직 그때에 限해 증명 가능하다.

(Grandy(1977) pp. 51~52 참조). 여기서 Gödel 대입함수 $\underline{\mathrm{Sub}}(\underline{x_1}, \underline{x_2})$의 유도가 바로 조건 (C)의 증명에 해당한다고 할 수 있다.

체계가 특히 관심의 대상이 되므로 이 체계를 의미론적으로 **정상적인**(**semantically normal**) 체계[18]라고 부르기로 한다. 의미론적으로 정상적인 체계에 대해서는 다음 정리가 성립한다

정리 (Ⅱ) S가 Gödel對應 함수 g에 대해 의미론적으로 정상적이면 S에서 정의 가능한 모든 集合에 대해 Tarski 문장이 존재 한다.

정리 (Ⅱ)는 정리 (Ⅰ)과 (C)로 부터 곧 유도 되지만 다음과 같이 증명될 수도 있다. S가 의미론적으로 정상적이면 임의의 술어 $H(x)$에 대해

$$Q\epsilon T \Leftrightarrow H(\ulcorner Q \urcorner)\epsilon T \qquad (4\text{-}10)$$

인 문장 Q가 存在한다. 왜냐하면 (4-9)에서 E대신 H_D를 대입하면

$$H_D(\ulcorner H_D \urcorner)\epsilon T \Leftrightarrow \mathrm{H}(\ulcorner H_D(\ulcorner H_D \urcorner)\urcorner)\epsilon T$$

여기서 $H_D(\ulcorner H_D \urcorner)$를 Q라고 하면 곧장 식(4-10)이 나온다.

다음 集合 W를 만족시키는 술어 $F(x)$에 대해 (4-10) 관계를 만족시키는 문장을 X라고 하면

$$X\epsilon T \Leftrightarrow F(\ulcorner X \urcorner)\epsilon T \qquad (4\text{-}11)$$

그런데 모든 E에 대해

$$F(\ulcorner E \urcorner)\epsilon T \Leftrightarrow E\epsilon W$$

이므로 E에 X를 대입한후 그 결과를 (4-11)과 결합하면

$$X\epsilon T \Leftrightarrow X\epsilon W$$

따라서 X는 W에 대한 Tarski 문장이 된다.

이제 의미론적 정상성(semantical normality)이 어느때 충족되는가를 알아 보기로 하자. 지금 S에서 다음과 같은 함수 diag(x)[19]가 存在한다고 가정하자.

(D) S의 임의의 식 E_2와 E_1에 對해 E_2가 E_1의 對角化인 경우 또 오직 그 경우에 限해 $\ulcorner E_2 \urcorner$와 diag$(\ulcorner E_1 \urcorner)$은 같은 개별 상수를 지시 하게 된다.

함수 diag(x)는 Gödel 대응이 x인 식E의 對角化에 대응하는 개별상수를 지시하는데 diag(x)와 對角化 그리고 g간의 관계를 圖示하면 다음과 같다.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\text{對角化}"] \arrow[d, "g"'] & E(\ulcorner E \urcorner) \arrow[d, "g"] \\ \ulcorner E \urcorner \arrow[r, "\mathrm{diag}(x)"] & \ulcorner E(\ulcorner E \urcorner) \urcorner \end{tikzcd}$$

의미체계 S에서 함수 diag(x)가 存在할 경우 조건 (C)는 만족 된다. 왜냐하면 임의의 술어 $H(x)$에 대해

$$H_d =_{df} H\ (\mathrm{diag}(x))$$

18) Smullyan (1957) p. 71 참조.

19) 이 함수는 위의 註 17에서 말한 Gödel의 대입함수 $\underline{\mathrm{Sub}}$ $(\underline{x_1, x_2})$에 해당한다.

와 같이 H_d를 정의 하면 모든 E에 대해

$$H_d(E)\epsilon T \Leftrightarrow H(\mathrm{diag}(E))\epsilon T$$

그런데 diag(E)는 「E(「E」)」이므로

$$H_d(\ulcorner E\urcorner)\epsilon T \Leftrightarrow H(\ulcorner E(\ulcorner E\urcorner)\urcorner)\epsilon T$$

이는 곧 H_d가 H의 對角술어임을 의미하는 것이다.

또한 함수 diag(x) 대신에 다음 조건을 만족하는 술어 $\delta(x, y)$가 存在한다고 가정하자[20]

(E) 모든 E_2 및 E_1에 대해 E_2가 E_1의 對角化인 경우 또 오직 그 경우에 限해 $\delta(\ulcorner E_1\urcorner,$ $\ulcorner E_2\urcorner)$는 眞이 된다.

이때 또한 S에 다음과 같은 형성규칙과 진리규칙을 충족시키는 논리기호 '$\exists$' 및 '&'가 存在한다고 하자.

(i) ϕ와 ψ가 문장이고 α가 변수인 경우 $(\phi\&\psi)$ 및 $(\alpha)\phi$도 문장이다.

(ii) $(\phi\&\psi)$는 'ϕ'와 'ψ'가 동시에 眞일때 또 오직 그 경우에 限해 眞이다. α가 ϕ의 唯一한 自由變數일대 $(\exists\alpha)\phi$는 적어도 하나의 개별상수 β에 대해 $\phi|_\beta{}^\alpha$가 眞일때 또 오직 그때에 限해 眞이 된다. $\phi|_\beta{}^\alpha$는 ϕ에서 變數 α대신에 β를 대입한 결과를 말한다.

이 경우 S의 임의의 술어 $H(x)$에 대해

$$H\delta =_{df} (\exists y)\ (\delta(x\ y)\ \&\ H(y)) \qquad (4\text{-}13)$$

와 같이 $H\delta$를 정의하면 $H\delta$는 여전히 H의 對角술어가 된다. 왜냐하면 (4-13)에 따라 모든 E에 대해

$$H\delta(\ulcorner E\urcorner)\epsilon T \Leftrightarrow (\exists y)\ (\delta(\ulcorner E\urcorner,\ y)\ \&\ H(y))\epsilon T$$

그런데$\delta(\ulcorner E\urcorner,\ y)$는 y가 E의 對角化 일때 또 그때에 限해 眞이 되므로 모든 E에 대해

$$(\exists y)\ (\delta(\ulcorner E\urcorner,\ y)\ \&\ H(y))\epsilon T \Leftrightarrow H(\ulcorner E(\ulcorner E\urcorner)\urcorner)\epsilon T$$

따라서 어떤 E에 대해서도

$$H\delta(\ulcorner E\urcorner)\epsilon T \Leftrightarrow H(\ulcorner E(\ulcorner E\urcorner)\urcorner)\epsilon T$$

이는 $H\delta$가 H의 對角술어 임을 의미한다.

이상의 결과에 依해 정리 (Ⅱ)를 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

정리 (Ⅲ) S에 함수 diag(x) 또는 술어 $\delta(x, y)$가 存在할 경우, S에서 정의 가능한 모든 集合에 대해 Tarski 문장이 存在한다. S의 식들로 이루워진 集合 W를 정의하는 술어를 H라고 하고 H_D를 (4-12) 또는 (4-13)에 依해 정의되는 대각술어 H_d 또는 $H\delta$라고 했을때 H_D의 對角化는 W에 대한 Tarski문장이 된다.

20) Smullyan은 함수 diag (x)와 술어 $\delta(x,y)$를 각기 E에 그 대각화를 대응시키는 함수의 엄격한 정의와 약한 정의라고 구분하고 있다 (p. 74)

§5. Gödel 문장

지금까지의 결과를 구체적인 集合에 적용하기 위해 우선 W를 S의 모든 식들의 集合에 對해 眞인 문장들의 集合의 여집합 $\bar{T}$라고 하자. 그리고 $\bar{T}$의 Tarski 문장을 A라고 하자. 정의에 따라 식(4-3)에서X대신 A, W대신 $\bar{T}$를 대입하면

$$A\epsilon T \Leftrightarrow A\epsilon\bar{T}$$

와 같은 모순된 결과를 얻게 된다. 이것은 자신이 眞이 아니라고 주장하는 문장은 있을 수 없다는 것, 卽 Liar의 역리에 해당 한다. 위의 논의는 $\bar{T}$뿐만이 아니라 $\bar{T}$의 모든 부분 집합, 특히 僞인 문장들의 集合 F에도 타당하게 적용된다. 따라서 정리(Ⅰ)과 정리(Ⅱ)과 依해 다음 정리를 얻게 된다.

정리 (Ⅳ) $\bar{T}$를 S에서 眞인 문장이 아닌 모든 식들의 集合이라고 할 경우 $\bar{T}$와 $\bar{T}$의 모든 부분 집합 특히 僞인 문장들의 集合 F의 對角집합들은 S에서 정의가 불가능 하다. 또한 S가 의미론적으로 정상적이면 $\bar{T}$와 $\bar{T}$의 모든 부분 집합들도 S에서 정의가 불가능하다.[20]

이제 '僞'로부터 '증명 불가능'으로의 轉換을 하기 앞서 증명 불가능한 集合을 정의하기 위한 준비 작업으로 의미 체계 S를 형식화 하는 문제를 고찰해 보자. 의미 체계 S에서 임의의 문장들을 擇해 이것을 公理로 삼고 다음 어떤 문장들로 부터 다른 문장들을 연역해 내는 추론 규칙을 S에 도입하기로 한다. 이 公理와 推論規則은 S의 통사체계(syntactical system)를 이루게 되는데 이것을 C로 표시하기로 한다. S에 어떤 통사체계 C가 도입되었을 경우 S는 C에 依해 公理化되었다고 말하고 그 결과로 나온 의미통사 체계(semantico-syntactical system)를 S^c로 표시하기로 한다.

증명가능성은 통사체계에 상대적인 것이므로 증명가능한 문장 즉 定理의 集合도 의미통사체계가 주어지기 전에는 정의될 수 없다. §3에서 나온 의미론적 일관성(semantical consistency)에 관한 假定 (A)도 의미통사 체계에 대해서만 의미있게 말해 질수 있다. 이것을 의미통사체계 S^c에서의 의미론적 일관성에 관한 정의로 고치면 다음과 같이 될 것이다.

(F) S에서 眞이 아닌 모든 식이 C에서 증명될 수 없을 경우 S^c를 의미론적으로 일관적이라 말한다.

C에서 증명가능한 문장 즉 S^c의 정리의 集合을 Th라고 하고 S의 모든식의 集合에 대한 Th의 여집합을 $\overline{\text{Th}}$라고 하자. 이경우 Th에 대한 Tarski 문장 G가 S^c의 Gödel 문장이 된다는 것은 앞에서 언급한 바와 같다.[22] 앞에 나온 정리 (Ⅰ),(Ⅱ)에서 W대신 集合 $\overline{\text{Th}}$를 대입하면 다음 결과가 나온다.

---

21) 정리 (Ⅳ)는 곧 체계 S內에서 모든 식 E에 對해 $R(\ulcorner E\urcorner)\epsilon T \Leftrightarrow E(\ulcorner E\urcorner)\epsilon\bar{T}$를 만족하는 술어 $R(x)$가 存在하지 않는다는 것을 意味한다. Richard의 逆理는 바로 이 사실에서 연유한다.

22) §4.2 참조

(정리 Ⅴ) (1) 集合 $\overline{\mathrm{Th}}$의 대각 集合 $D(\mathrm{Th})$가 S에서 정의 가능하면 S^c의 Gödel 문장 G가 存在한다. 따라서 S^c가 의미론적으로 일관적이면 다음과 같은 의미에서 不完全(incomplete)하다.

(i) S^c는 S에서 眞이면서도 증명 불가능한 문장 G를 포함한다.

(ii) 이 G는 자신은 물론 그 否定(negation)인 $\sim G$도 증명될 수 없다.

(2) S가 Gödel 대응함수 g에 대해 의미론적으로 정상적이며 또한 (F)와 같은 뜻에서 의미론적으로 일관적이라고 하자. 이경우 集合 $\overline{\mathrm{Th}}$가 S에서 정의될수 있으면 S^c의 Gödel 문장이 존재하며 따라서 S^c는 불완전하게 된다.

다음 S에 아래의 형성 규칙과 진리규칙을 만족시키는 논리기호 '$\sim$'가 포함되 있다고 가정하자.

(i) ϕ가 문장이면 $\sim\phi$도 문장이다.

(ii) ϕ가 僞일 경우 또 오직 그 경우에 限해 $\sim\phi$는 眞이다.

이때 S의 식들로 이루워진 임의의 集合 W의 여집합 $\overline{W}$는 W가 S에서 정의될 수 있는 경우 또 오직 그 경우에 限해 S에서 정의가 가능하며 H가 W(또는 $\overline{W}$)를 정의하는 술어라고 할때 $\overline{W}$ (또는 W)를정의하는 술어는 $\sim H$가 된다. 따라서 정리 (Ⅲ)과 (Ⅵ) 및 (Ⅴ)를 종합하면 다음 정리를 얻을수 있다.

정리 (Ⅵ) 의미체계 S에 논리기호 '$\sim$'가 포함돼있으며 또한 함수 diag(x) 또는 술어 $\delta(x,y)$가 정의돼 있다고 가정하자. 이때

(1) 眞인 문장들의 集合 T 또는 僞인 문장들의 集合 F는 S에서 정의가 불가능 하다.

(2) S^c가 의미론적으로 일관적일 경우, S^c의 정리의 集合 Th가 S에서 정의 가능하면 S^c는 정리 (Ⅴ)의 (1)에서 언급한 의미에서 不完全하다.

이경우 S^c의 Gödel 문장 G는 다음과 같은 방식으로 구해진다. Bew(x)를 集合 Th를 정의하는 술어라고 하면 $\sim$Bew(x)는 集合 $\overline{\mathrm{Th}}$를 정의하는 술어가 된다. 이때 F_D를 diag(x)가 정의돼 있는가 또는 $\delta(x,y)$가 정의돼 있는가에 따라

$$F_D =_{df} \sim \mathrm{Bew}\ (\mathrm{diag}\ (x)) \tag{5-1a}$$

또는

$$F_D =_{df} (\exists y)\ (\delta(x,y)\ \&\ \sim \mathrm{Bew}\ (y)) \tag{5-1b}$$

라고 정의하면 F_D는 $\sim$Bew(x)의 對角술어가 되며 F_D의 對角化

$$F_D(\ulcorner F_D \urcorner) \tag{5-2}$$

가 바로 Gödel 문장이 된다.

(5-1a) 또는 (5-1b)에 依해 $F_D(\ulcorner E \urcorner)$는 E의 대각화 즉 $E(\ulcorner E \urcorner)$가 증명불가능 하다는 것을 의미하는 문장이 된다. 따라서 $F_D(\ulcorner F_D \urcorner)$는 F_D의 對角化 즉 $F_D(\ulcorner F_D \urcorner)$는 자신이 증명 불가능함을 의미하는 自己指示的인 문장이 된다.

(5-2)의 自己指示性을 좀더 분명히 밝히기 위해 Gödel의 대응을 나타내는 기호 '「 」'를 인용구 기호로 해석하고 變數 x를 식 E의 인용구 즉 「E」라고 간주하기로 한다. 이때 對角化의 정의에 依해 $F_D(x)$는

E에서 x대신 E의 인용구를 대입한 결과는 증명불가능 하다. (5-3)

와 같이 번역되며 (5-2)의 F_D(「F_D」)는

「E에서 x대신 E의 인용구를 대입한 결과는 증명 불가능 하다」에서 x대신 「E에서 x대신 E의 인용구를 대입한 결과는 증명 불가능 하는」의 인용구를 대입한 결과는 증명 불가능 하다.[23] (5-4)

와 같은 문장을 의미하게 된다.

(5-4)는 바로 자신이 증명 불가능 하다는 것을 주장하고 있다. 왜냐하면 (5-4)는 (5-3)에서 x 즉 「E」 대신에 (5-3)의 인용구를 대입한 결과가 증명불가능 하다는 것을 주장하고 있는데 (5-3)에 「E」 대신 (5-3)의 인용구를 대한 결과는 바로 (5-4) 자신이 되기 때문이다

다음에는 지금까지 일반적인 의미체계에 대해 얻은 결과를 구체적인 自然數체계에 적용하여 이체계의 Gödel문장을 실제로 구해 보기로 한다.

§6. 自然數체계 S_N에서의 Gödel의 정리

6.1. 自然數 체계 S_N

우리가 고찰하려는 自然數체계 S_N은 다음과 같은 基本기호(primitive symbols)를 포함하고 있다.

(1) 개별 變數 : $x, x', x'', \cdots\cdots ; z, z', z'', \cdots\cdots ; y, y', y'', \cdots\cdots$.

(2) 개별 상수 : *1*, *11*, *111*,……

상수 '*11*', '*111*'……등은 각기 *3*, *2*……등으로 간략히 표시하기로 한다.

(3) 논리 상수 : ~, &, (,), ,$\exists$, =.

여기서 '='는 2차 술어이다.

(4) 연산기호 : +, ×, ○

이들은 모두 2차의 연산기호이다.

S_N의 項들은 다음에 依해 정의된다.

(5) 개별상수와 개별 변수는 모두 項이다.

(6) τ_1과 τ_2가 項일 경우, $\tau_1+\tau_2$, $\tau_1\times\tau_2$, $\tau_1\circ\tau_2$는 모두 項이다.

S_N의 項들은 또 (5) 및 (6)에서 정의된 것에 한한다. 이하에서는 '$\tau_1\times\tau_2$'는 '$\tau_1\cdot\tau_2$'로 '$\tau_1\circ\tau_2$'는 $\tau_1^{\tau_2}$로 각기 略한 표현을 쓰기로 한다.

23) Quine (1951)은 (5-4)로 부터 꺼꾸로 Gödel문장을 구하는 과정을 제시하고 있다(§59).

S_N의 文章은 다음 형성규칙(rules of formation)에 依해 구성된다.

(7) τ_1과 τ_2가 項일 경우 '$(\tau_1=\tau_2)$'는 문장이다. 이것을 原子문장 이라고 한다.

(8) ϕ와 ψ를 문장이라고 하고 α를 변수라고 할때 $\sim\phi$, $(\phi\&\psi)$ 및 $(\alpha)\phi$와 $(\exists\alpha)\phi$는 모두 문장이다.

S_N에서의 문장은 오직 (7)과 (8)에서 정의된 것에 限한다.

S_N의 指示규칙과 眞理규칙은 다음과 같다.

(9) 개별 상수 '1'은 自然數 1을 그리고 2, 3, …은 自然數 2, 3, …등을 가르킨다.

(10) 2차의 연산기호 '+', '×' '∘'은 각각 덧셈, 곱셈, 지수 함수를 가르 킨다.

(11) τ_1과 τ_2가 自由變數를 포함하지 않을 경우 원자 문장 '$(\tau_1=\tau_2)$'는 τ_1과 τ_2가 같은 自然數를 지시할 때 또 오직 그 경우에 限해 眞이다.

(12) ϕ은 ψ가 自由變數를 포함하지 않는 문장이라고 할때

'$\sim\phi$'는 ϕ가 僞일때 또 오직 그 경우에 限해 眞이다.

'$(\phi\&\psi)$'는 ϕ와 ψ가 동시에 眞일때 또 오직 그 경우에 限해 眞이다.

(13) α가 ϕ의 유일한 自由變數인 경우

'$(\alpha)\phi$'는 變數 α가 어떤 自然數를 지시해도 ϕ가 眞일때 또 오직 그 경우에 限한 眞이며

'$(\exists\alpha)\phi$'는 $\sim(\alpha)\sim\phi$가 眞일때 또 오직 그 경우에 限해 眞이다.

6.2. Gödel의 自然數 대응함수(Gödel's numbering)

自然數 체계 S_N의 각식에 다음과 같은 요령에 따라 S_N의 개별 상수를 대응 시키기로 한다. 우선 S_N의 기본기호에 다음과 같은 상수를 대응 시킨다.

'(' …… *1*, ')' …… *18*, '∼' …… *2*, '&' …… *28* '=' …… *3*

'∃' …… *4*, 'x' …… *5*, 'y' …… *58* 'z' ……*588* '′' …… *6*

'+' …… *7* '×' …… *78*, '$_c$' ……*788* '1' …… *9*

다음 S_N의 각식에는 이 식에 등장하는 기호대신 위의 방식에 따라 그 기호에 대응된 개별 상수를 10진법으로 표시한 숫자(numeral)로 대치 하여 나온 숫자가 표현하는 개별 상수를 대응시킨다. 예컨대 식 '$(\exists x)(=x')$'에는 개별상수 *145181356 18*이 대응된다. 이 대응관계는 §4.1에서 제시한 條件 (i)과 (ii)를 만족시키고 있으므로 이를 Gödel 對應函數라고 할 수 있다. 그런데 대응되는 개별 상수가 自然數를 지시하고 있으므로 이 對應函數를 Gödel의 自然數 對應函數(Gödel's numbering)[24]라고 부르고 이를 gn으로 표시하기로 한다. 또 gn에 依해 식E에 對應되는 개별상수를 Gödel 數(Gödel number)라고 하고 이것을 「E」로 나타내기로 한다.

6.3. 새로운 對角化의 정의와 Gödel정리의 유도

24) 위에 설명한 Gödel의 自然數 대응 함수는 Boolos & Jeffrey (1974)가 제시한 (p. 174) Gödel대응 함수를 약간 수정하여 소개한 것이다.

우리는 앞서 술어 $H(x)$의 對角化를 $H(\ulcorner H \urcorner)$로 정의 했다. 그러나 여기서 H의 對角化를 새로이

$$(\exists x)\ (x=\ulcorner H \urcorner\ \&\ H) \tag{6-1}$$

로 정의하고 對角集合과 對角술어를 이 새로운 對角化의 정의에 대응하여 다시 적절하게 정의하기로 한다.[25]

그런데 모든 n과 $H(x)$에 대해

$$H(n)\text{은 眞} \Leftrightarrow (\exists x)\ (x=n\&H)\text{는 眞} \tag{6-2}$$

과 같은 논리적 동치 관계가 성립 하므로 앞서 나온 모든 공식은 새로운 對角化와 對角集合 및 對角술어의 정의에 대해 타당하게 성립한다. 정리 (Ⅰ)을 예로 들어보자. 이정리의 가정에 의해 모든 E에 대해

$$H_D(\ulcorner E \urcorner)\text{는 眞} \Leftrightarrow E \epsilon D(W)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\ (x=\ulcorner E \urcorner \& E) \epsilon W$$

그런데 (6-2)에 依해 모든 E에 對해

$$H_D(\ulcorner E \urcorner)\text{는 眞} \Leftrightarrow (\exists x)\ (x=\ulcorner E \urcorner\ \&\ H_D)\text{는 眞}$$

이 성립 하므로 모든 E에 대해

$$(\exists x)\ (x=\ulcorner E \urcorner\ \&\ H_D)\text{은 眞} \Leftrightarrow (\exists x)\ (x=\ulcorner E \urcorner \& E) \epsilon W$$

여기에 E대신 H를 대입하면 H_D의 對角化는 여전히 W의 Tarski 문장이 된다.

이제 S_N에서 앞의 §4.2에서 언급한 조건 (E)를 충족하는 술어 $\delta(x,y)$를 구하기 위해 우선 다음과 같은 정의를 도입한다.

$$x>y=_{df}(\exists z)\ (x=y+z)$$

$$x\geq y=_{df}\sim(\exists z)\ (x+z=y)$$

다음 2차 술어 $\mathrm{lh}(x,y)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{lh}(x,y)=_{df}\ (10^x>y)\ \&\ (x')\ ((10^{x'}>y)\rightarrow x'\geq x)$$

$\mathrm{lh}(x,y)$는 'x는 10진법으로 표시된 y의 자릿수 이다' 라는 진술에 해당한다. 이술어를 이용해 다음과 같은3차, 4차 술어를 차례로 정의한다.

$$z=y*y'=_{df}(\exists x'')\ ((z=y\cdot 10^{x''}+y')\ \&\ \mathrm{lh}\ (x'',y'))$$

$$z=y*(y'*y'')=_{df}(\exists x''')\ ((z=y*x''')\ \&\ (x'''=y'*y''))$$

술어 '$z=y*y'$'는 'z는 y와 y'을 십진법의 숫자로 표시하여 서로 연결한 십진법의 숫자가 가리키는 數이다' 라는 진술에 해당 한다. 따라서 y를 $\ulcorner E_1 \urcorner$, y'을 $\ulcorner E_2 \urcorner$라고 했을 경우 z는 E_1과 E_2를 서로 연결해서 나온식 'E_1E_2'의 Gödel數를 가르키게 된다. 3차, 4차 술어의 경우도 이와 마찬가지 이다.[26]

25) 이 새로운 對角化의 정의는 Boolos & Jeffrey (1974)에 따른 것이다.

26) 예를 들어 $27*18=2718$ $3*(16*24)=31624$

다음 술어

$$z'+1=10^{x+1}$$

은 'z''은 개별 상수 x의 Gödel數이다'라는 진술에 해당한다. 예를들어 x가 3일 경우,

$$\begin{aligned} gn(3)+1&=999+1\\ &=10^{3+1}\end{aligned}$$

이제 술어 $\delta(x,y)$를

$$\delta(x,y)=_{df}(\exists z')\,((y=14518135*(z'*\,(28*(x*18))))\ \&\ (z'+1=10^{x+1}))$$

와 같이 정의하면 술어 *의 정의에 의해 $\delta(\ulcorner E_1\urcorner,\ulcorner E_2\urcorner)$는 명백히 모든식 E_1과 E_2에 대해 E_2가 E_1의 對角化인 경우 또 오직 그 경우에 限해 眞인 명제가 된다. 또한 술어 $\mathrm{lh}(x,y)$와 *의 정의에는 오직 S의 기호들 만이 포함되있으므로 $\delta(x,y)$는 S_N의 술어가 된다. 따라서 $\delta(x,y)$는 §4.2의 조건 (E)를 충족시키는 술어라는 결론이 나온다.

이상의 결과에 의해 우리는 정리 (Ⅵ)로 부터 다음과 같은 정리를 얻을수가 있다.

정리 (Ⅶ) 위에서 정의한 Gödel의 自然數 對應函數 gn에 대해

(1) S_N에서 정의 가능한 모든 집합에 대해 Tarski 문장이 존재한다.

(2) S_N의 眞인 文章의 集合 T 및 僞인 문장의 集合 F는 S_N에서 정의 불가능하다[27]

(3) S_N을 어떤 방법으로 공리화 한다 해도 이 公理化에 의한 定理의 集合 Th를 S_N에서 정의 할수 있으면 이 공리체계가 의미론적으로 일관적인 限 이 체계는 不完全하다.

定理 (Ⅶ)의 (3)은 이른바 縮少化된 Gödel의 定理라고 할 수 있다. 여기서 축소화 됐다는 것은 (3)의 假定부분 즉 S_N의 어떤 일관성 있는 공리체계에 대해서도 그체계의 定理의 集合이 S_N에서 표현이 가능하다는 사실을 우리가 증명하지 않고 있음을 뜻한다. 이것을 증명하면 S_N의 일관적이고도 완전한 公理化는 存在하지 않는다는 결론을 얻을 수 있을 것이다. 그러나 우리가 관심을 갖는 것은 Gödel의 증명과정중에서 오직 대각선 논법이 관여하는 부분에 限하므로 이 문제는 더 이상 논의하지 않기로 한다.

맺 음 말

Gödel의 문장은 극히 교묘하게 구성된 자기 지시적인 문장이다. 그러나 Gödel 문장이 갖는 결정 불가능성은 이같은 자시지시성에서만 비롯된 것이 아니며 자신에 대해 증명이 불가능 하다고 주장하고 있는 사실에서도 연유된다. 어떤 문장이 자기 지시적이긴 하나 자신에 대해 僞임을 주장하면 그것은 Liar의 역리와 같은 모순에 빠지게 된다. 그러나 증명 불

27) 集合 T는 여기서 제시한 Gödel 대응 함수 gn 만이 아닌 어떤 Gödel 對應함 수 에대해서도 S_N에서 정의가 불가능하다. 이것이 이른바 Tarski의 眞理의 정의 불가능성 정리(Theorem on Indefinability of Truth)의 내용이다. (Grandy (1977) chapter Ⅸ. Tarsk (1956)參照)

가능함을 주장할 경우에는 Gödel문장이 된다.

Gödel문장의 결정 불가능성은 自己指示性과 자신에 對한 불가능성 주장두가지 요소에서 비롯되는 것인데 對角線논법은 바로 Gödel문장이 자기 지시적인 문장이 되도록 하는데 이바지한다. 우리가 §4에서 對角線논법을 이용하여 Gödel의 문제를 일반적인 의미체계에서 임의의 술어에 대한 자기지시적인 문장, 卽 Tarski의 문장을 구하는 문제로 일반화 시킬수 있었던 것도 바로 이 때문이다.

本稿에서 제시한 對角線과정에 의한 결정 불가능한 명제의 구성 방법은 Gödel의 발상에 따른 고전적인 방법이다. 대각선 방법에서는 대각화라고 불리우는 대입과정이 핵심적인 부분을 이룬다. 그러나 위의 §6에서 $\delta(x, y)$를 유도한 과정에서 보듯이 對角化를 산술화 하기란 상당히 복잡하다. 이에 反해 Smullyan (1957)은 대입대신 연결(concantenation)을 기초로 하여 對角線논법과 대응되는 방식으로 Gödel 문장을 구성해 내는 방법을 제시하고 있는데 이는 연결이 대입에 비해 산술화가 훨씬 용이 하다는 점에서 특기할 만하다.

參 考 文 獻

Smullyan, R.M. (1957) "Language in which self reference is possible" *The philosop
ly of Mathematics* ed. by Jakko Hintikka (Oxford U. Pr. 1969) pp. 64-77에 수록

Gödel, K (1931) "On formally undicidable propositions of Principia Mathematica and related systems" *From Frege to Gödel* by J.V. Heijenoort (Cambridge, 1967) pp. 596-616에 수록

Boolos, G. & Jeffrey, R. (1974) *Computability and Logic* (Cambridge U. Pr.)

Grandy, R.E. (1977) *Advanced Logic for Applications* (D. Reidel)

Kleene, S.C. (1952) *Introduction to Metamathematics* (North-Holland Publ. Co.)

Nagel, E. & Newman, J.R. (1958) *Godel's Proof* (New York U. Pr.)

Ouine, W.V.O. (1951) *Mathematical Logic* (Harvard U. Pr.)

Wilder, R. (1965) *Introduction to the Foundations of Mathematics* (John Wiley & Sons, Inc)

The Encyclopedia of Philosophy (MacMillan Publ. Co., Inc. & Free Press, 1967) Vol. 3 "Gödel's Theorem" 項

Tarski, A. (1956); "The Concept of truth in formalized languages" *Logic, Semantics and Metamathematics* (Oxford U. Pr.) pp. 152-278에 수록