퍼지 수학과 그 응용에 관한 고찰

장 이 채

(건국대학교 자연과학대학 응용수학과)

A Note on Fuzzy Mathematics and Its Applications

Lee-Chae Jang

(Department of Applied Mathematics, College of Natural Science, Kon-Kuk University)

Abstract

Fuzzy sets are a mathematical concept proposed by prof. L. A. Zadeh in 1965. In this paper, we introduce the theoretical study of fuzzy sets and its application. And also we investigate some definitions of fuzzy inferences and some examples of fuzzy expert systems. I hope that those who want to learn about fuzzy theory for practical purposes are interested in this paper.

I. 서 론

퍼지 집합은 1965년 캘리포니아 대학의 L. A. Zadeh 교수에 의해 처음으로 도입되었다. 그 이후 국제 퍼지 체계 협회(the International Fuzzy Systems Association, IFSA)에 의해 꾸준히 퍼지 응용의 활성화를 위해 국제적으로 활동을 해오고 있다. 퍼지 응용은 제어 정보 시스템 등에 관련된 모든 분야에 공헌하고 있는 실정이다. 이 논문에서 우리는 퍼지 집합의 이론과 응용을 소개한다. 또한 퍼지 추론의 정의들을 조사하고 퍼지 전문가 시스템의 예들을 소개한다. 실용화 목적으로 퍼지 이론을 배우고자 하는 과학자들이 이 논문에 흥미를 가질 수 있기를 희망한다.

퍼지(fuzzy) 이론은 수학적 이론이고, 퍼지성(fuzziness)는 불확실성(uncertainty)을 지닌다는 뜻이다. 예를 들면 나이 많은 사람, 높은 온도, 작은 수 등과 같은 불확실성을 퍼지성이라 할 수 있다. 지금까지 수학자들이 연구해 온 유일한 불확실성은 확률이다. 예를 들면 "주사위를 던질 때 3의 눈이 나온다", "내일 비가 올 것이다" 등은 확률적인 불확실성을 가진다. 퍼지의 불확실성과 확률의 불확실성은 차이가 있다. 예를 들면, "내일 비가 올 것이다"에서 생기는 불확실성은

내일이 되기 전에 예상하기 때문이다. 그리고 내일이 오면 분명해진다. "주사위를 던질 때 3의 눈이 나온다"에서 생기는 불확실성은 주사위를 던지는 시행을 하기 전에 예상하기 때문에 생긴다. 그리고 주사위를 던지면 분명해진다. 이와 같이 확률의 불확실성은 시간이 지난다든지 시행을 하는 것과 관계가 있다. 한편 "나이가 많은 사람, 높은 온도" 등에서 생기는 불확실성은 시간이 지나고 시행을 하더라도 관계없음을 알 수 있다.

인간에게 봉사하는 만능 로봇의 실현을 바라는 사회적 욕구를 충족시켜 주는 분야에 더욱 퍼지 응용은 제 기능을 발휘하고 있다. 공업 분야의 고도의 자동제어 · 자동번역 · 지능 로봇 · 지식베이스 · 지능 단말 · 홈 오토메이션이 있고, 생체 분야의 의료진단 · 한방의료 · 인공내장제어 · 간호 로봇 · 애프터케어 · 보건 시스템 · 인공 팔다리 등이 있고, 비지니스의 영역에서 경영의 의사결정 지원 · 오피스 오토메이션 등이 있다. 이 외에도 환경 평가라든가, 농수산물 평가 등에도 퍼지 이론이 적용되고 있다. 퍼지 이론을 좀더 체계적으로 응용하기 위해서는 다음과 같은 점들을 해결해야 한다.

① 애매한 지식의 표현과 애매한 지식의 획득 방법

② 애매한 사고 방법

③ 소속함수(membership function)의 설정;
이는 퍼지수(fuzzy number)의 정의에서 나오는 용어이다.

④ 시스템의 기능 예측

⑤ 조직적 설계법

⑥ 퍼지 측도(fuzzy measure)와 퍼지 적분(fuzzy integral)의 설정

위와 같은 영역들 가운데, 퍼지의 응용을 위해 응용수학 분야에서 할 수 있는 영역은 ③과 ⑥ 항목에 해당하는 퍼지 집합의 개념을 이용한 퍼지 논리와 퍼지 사고에 관련된 이론과 퍼지 측도와 퍼지 적분 등이 있다. 얼마 전까지 초보적 단계에서 머물던 퍼지 연구가 현재는 인간과 정보 시스템을 결부시키는 새로운 역할을 하고 있으며, 첨단 기술의 하나로서 그 자리를 굳건히하게 되었다. 초기 퍼지 응용의 경향은 공업에의 응용이 주된 것이지만 최근에 이르러 의학, 경영, 마케팅, 증권, 기상, 환경, 농산물, 교육 등의 분야에 정보처리(진단, 평가, 측도) 모델화하는 데 퍼지 이론을 응용하고자 활발하게 연구되고 있다. 퍼지 이론은 집합개념의 의미로 축소하여 서술한다. 퍼지 이론의 또 다른 장점이 있다면 다음과 같다. 인간이 '상식'이라는 애매한 지식을 갖고 그것을 처리하는 애매한 사고능력을 가지고 있기 때문에 과학에서 다루고 있는 명제, 즉, 참 · 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장뿐만 아니라, 명제가 아닌 대상도 퍼지 이론에서는 다룰 수 있다는 것이다. 현대사회의 과학문명은 그 구조가 매우 복잡하고, 따라서 첨단산업의 기술을 개발할 때 어떤 복잡한 정보들 가운데 애매한 정보는 배제하고, 완전한 정보(수학적으로는 명제에 해당함)를 갖고서 당면문제를 예상하기 마련이다. 이렇게 되면 많은 정보손실

(information loss)을 입게 된다. 예를 들면 "사과 두 개 사오너라"라는 심부름을 시켰다고 해 보자. 우리는 정확히 사과 두 개를 사면 될 것이다. 그러나 "사과 두어 개를 사오너라"고 했다면 우리는 사과를 몇 개 사야 할지 잠시 망설이게 된다. 이때 애매한 숫자 두어 개는 두 개를 사든지 세 개를 사든지 알아서 하라는 뜻이다. 이때 인간은 적당히 애매한 사고를 하여 두 개를 사올 수도 있다. 그러나 컴퓨터의 통신을 통해 구매할 경우를 생각해 보자. 애매한 표현을 처리할 방법이 없어서 몇 개를 판매해야 하는지 예상하는 데 실패함으로써 주문을 받지 못하게 된다. 이러한 뜻에서 정보의 손실을 줄이는 방향으로 연구하고자 하는 것이 퍼지 시스템이다.

퍼지 측도이론은 일반 측도이론의 일반화이다. 1970년 후반부터 본격적으로 공학자 및 수학자들에 의해서 퍼지 측도가 정의된 이후 현대 산업사회에 적용되는 많은 모델들을 만들어 왔다. 퍼지 측도와 더불어 퍼지 적분이론도 동시에 정의되어 왔는데, 지금까지 정의되어진 적분형태들은 다음과 같다.

① 퍼지 적분; Sugeno 적분이라고도 정의한다.

② Choquet 적분

③ Weber 적분

④ L 퍼지 적분

이들 퍼지 측도 및 퍼지 적분은 평가문제(evaluate problem)에서 퍼지의 개념을 이용한 분야이다. 제Ⅱ장에서는 퍼지 수학의 이론들 가운데서 공리론적 집합을 기초로 한 L. A. Zadeh 교수의 퍼지 집합을 소개하고자 한다. 제Ⅲ장에서는 퍼지 추론과 퍼지 전문가 시스템에 관한 이론과 실용화한 예들을 소개하고자 한다.

Ⅱ. 퍼지 집합에 관한 소개

Crisp 집합은 보통 유한개, 헤아릴 수 있는 무한개, 혹은 헤아릴 수 없는 무한개의 개수를 갖는 원소들의 모임으로 정의한다. $A \subset X$인 집합 A가 있다면, 임의의 원소가 A에 속하든지 혹은 속하지 않는다. 전자의 경우, 명제 "x가 A에 속한다"는 참(true)이지만, 후자의 경우에서 이 명제는 거짓(false)이 된다. 이와 같은 Crisp 집합의 표현은 서로 다른 방법으로 표시할 수 있는데, 하나는 집합의 원소를 순서대로 적어 주는 원소나열법이고 다른 하나는 조건제시법으로 적을 수 있다. 1에 대응하는 것은 원소를 나타내고, 0에 대응하는 것은 원소가 아님을 나타낸다. 성질의 유무가 0과 1(혹은 거짓과 참)로 나눌 수 있는 것이 Crisp 세계의 이야기이다. 그러나 세상에는 참・거짓이 분명하지 않는, 혹은 그렇게 하고 싶지 않는 사항도 많다. 예를 들면, "이번 계획에 x씨를 참가시키려고 생각하지만 어떻습니까?"라는 질문에 대해서 "그다지 좋다고는

생각하지 않지만 그 외의 적절한 사람이 없기 때문에 할 수 없지 않겠는가?"와 같은 유의 응답은 흔히 있는 일이다. 이와 같은 의미의 긍정(참)과 "x씨야말로 적임이다"라는 의미의 긍정(참)을 동일하다고 볼 수 없다. 그래서 Zadeh(캘리포니아 대학) 교수는 0 또는 1의 2치 평가 {0, 1}를 0이상 1이하인 [0, 1]의 값으로 확장해서 퍼지 집합(fuzzy set)의 개념을 1960년대 초에 제창하였고, 1965년에 *Information and Control* 지에 "Fuzzy sets"라는 제목의 논문을 발표했다. 그리고 Zadeh 교수는 특성함수를 대신하여 소속함수(membership function)라는 말을 사용했다.

정의 2.1 전체공간 X상의 퍼지 집합 A와 소속함수 m_A는 다음과 같은 순서쌍의 집합으로 정의한다.

$$A = \{ (x, m_A(x)) \mid x \in X \}$$

$$m_A : X \to [0,1] \quad \text{by } x \to m_A(x)$$

m_A를 대신하여 μ_A와 f_A 등의 기호가 사용되기도 한다. 또한, Crisp 집합과 명확하게 구별하기 위해 퍼지 집합 A를 $\tilde{A}$와 같이 나타내기도 한다. 퍼지 집합을 나타내는 방법을 두 가지 소개한다. 첫째는 퍼지 집합을 순서쌍으로 첫번째 좌표는 원소를 나타내고 두번째 좌표는 소속의 등급을 나타낸다.

예제 2.2 A = "10보다 비교적 큰 실수"를 아래와 같은 소속함수로 정의한다.

$$A = \{ (x, m_A) \mid x \in X \}, \qquad X = R$$

$$m_A(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \le 10 \\ (1+(x-10)^{-2})^{-1} & , \ x > 0 \end{cases}$$

<그림 2.1>을 보라.

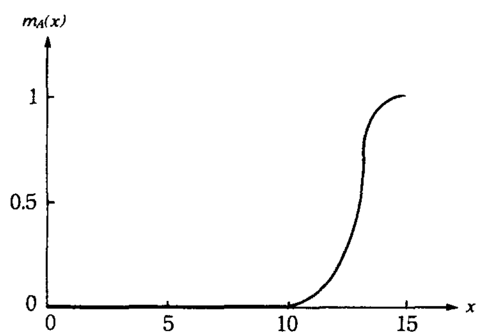


그림 2.1. "10보다 비교적 큰 수"

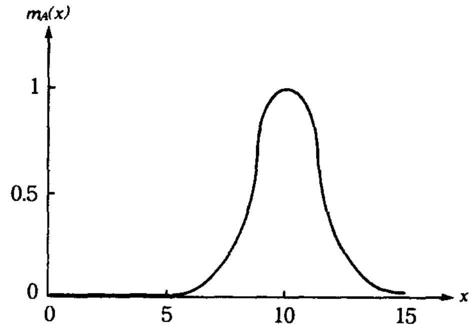


그림 2.2. "10에 가까운 실수"

예제 2.3 A = "10에 가까운 실수"를 아래와 같은 소속함수로 정의한다.

$$A=\{(x,\ m_A(x))\mid m_A(x)=(1+(x-10)^2)^{-1}\}$$

<그림 2.2>를 보라.

둘째는, 퍼지 집합 A를

$$\begin{aligned} A &= m_A(x_1)/x_1+m_A(x_2)/x_2+\cdots+m_A(x_n)/x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_A(x_i)/x_i \end{aligned}$$

로 나타내든지, 혹은 $A=\int m_A(x)/x$로 나타낸다.

예제 2.4 A = "10에 가까운 정수"를 아래와 같이 소속함수로 정의한다.

$$A = 0.1/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 1/10 + 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13$$

여기서, 0.8/9 는 $m_A(9)=0.8$을 나타낸다.

예제 2.5 A = "10에 가까운 실수"를 아래와 같이 소속함수로 정의한다.

$$A=\int \frac{1}{1+(x-10)^2}/x$$

여기서, 소속함수의 설정은 전문가의 경험이나 실험에 의해 얻어진 결과를 토대로 결정되어질 수 있다. 또한, 소속함수의 표시를 <그림 2.3>에서처럼 등고선에 의해 나타내는 경우도 있다.

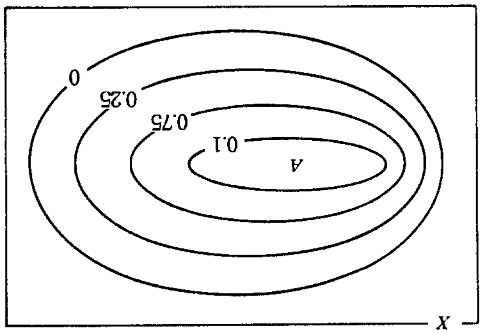


그림 2.3. 소속함수의 등고선에 의한 표시

정의 2.6 퍼지 집합 A의 지지 집합(support set), $S(A)$는 X에 속하는 원소로서 $m_A(x)>0$ 인 x들의 모임인 Crisp 집합이다.

예제 2.7 <예제 2.4>에서 제시한 퍼지 집합 A의 지지 집합은

$$S(A) = \{ 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \}$$

이다.

정의 2.8 퍼지 집합을 A라 하고, [0, 1] 상의 임의의 원소 α에 대하여, α-레벨 집합(α-level set) A_α를 다음과 같이 정의한다 ;

$$A_\alpha = \{ x \in X \mid m_A(x) \geq \alpha \}$$

또한,

$$A_\alpha^{\cdot} = \{ x \in X \mid m_A(x) > \alpha \}$$

를 강 α-레벨 집합(strong α-level set) 혹은 강 α-절단(strong α-set)이라 정의한다.

예제 2.9 <예제 2.4>에서 제시한 퍼지 집합 A의 α-레벨 집합들을 조사하자.

$$A_{0.1} = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

$$A_{0.5} = \{8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A_{0.8} = \{9, 10, 11\}$$

$$A_{1.0} = \{10\}$$

또한, 강 α-레벨 집합 $A'_{0.8} = \{10\}$이다.

퍼지 집합에 있어서도 Crisp 집합과 같은 집합연산을 생각할 수 있다. 가장 기본적인 연산으로, 포함관계, 여퍼지 집합, 곱퍼지 집합, 합퍼지 집합의 정의는 다음과 같이 주어진다.

$$A \subset B \Leftrightarrow \text{임의의 } x \in X\text{에 대하여}, \ m_A(x) \leq m_B(x)$$

$$\text{임의의 } x \in X\text{에 대하여}, \ m_{A^c}(x) = 1 - m_A(x)$$

$$\text{임의의 } x \in X\text{에 대하여}, \ m_{A \cap B}(x) = m_A(x) \wedge m_B(x)$$

$$\text{임의의 } x \in X\text{에 대하여}, \ m_{A \cup B}(x) = m_A(x) \vee m_B(x)$$

이것들을 개념적으로 도시하면 <그림 2.4>에 나타내는 것과 같이 된다.

전체집합 X상의 모든 퍼지 집합들의 모임을 $P(X)$로 기술했을 때 ($P(X)$, $\subset$, $\cdot^c$, $\cap$, $\cup$)의 체계는 부울대수가 될 수 없다. 그러나 포함관계 $\subset$는 반사성 · 반대칭성 · 추리성이 쉽게 알

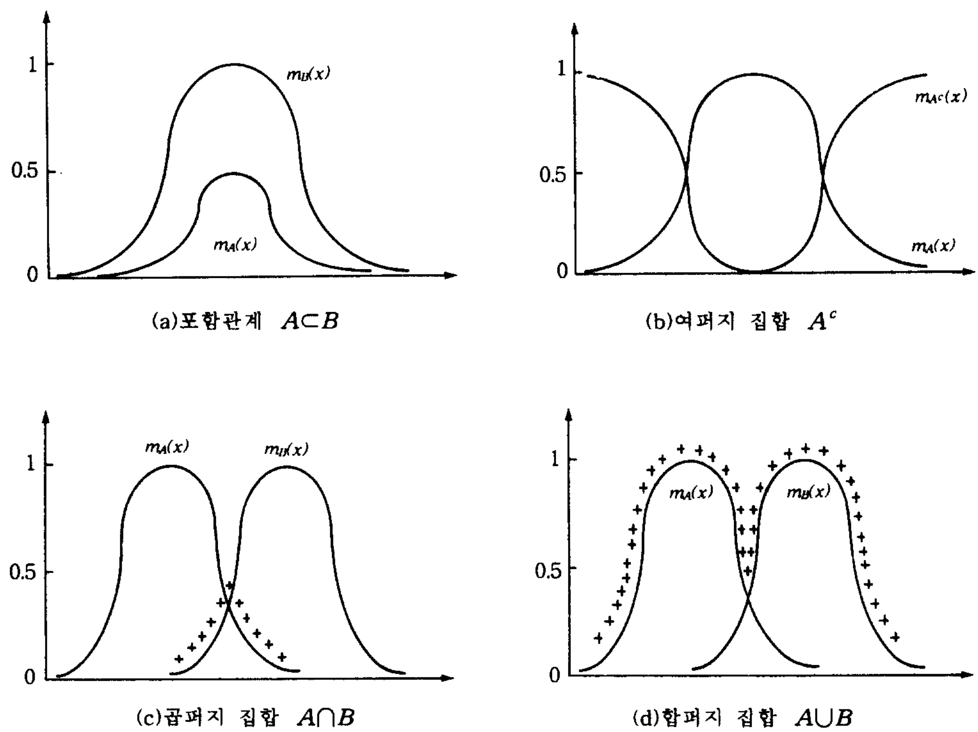


그림 2.4. 기본적 퍼지 집합연산

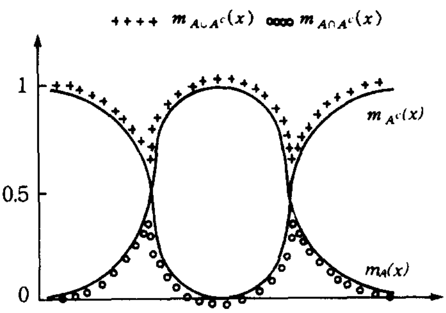


그림 2.5. 상보법칙의 불(不)성립

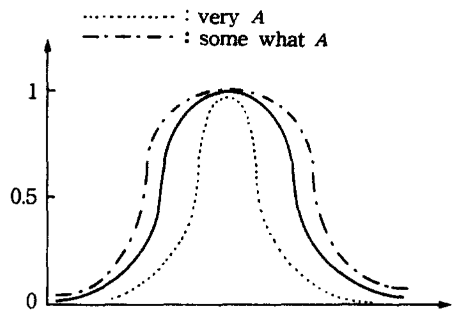


그림 2.6."very A" 와 "some what A"

수 있고, 상등 · 교환 · 결합 · 흡수 · 분배 · 2중부정 · 드 모르강의 법칙 등도 용이하게 성립함을 알 수 있다. 그러나 유일하게 성립하지 않는 것은 상보법칙이다. 다른 말로 해서, 퍼지 집합에서는 중간배제의 법칙(excluded-middle law) 혹은 모순의 법칙(law of Contradiction)이 성립하지 않는다;

$$A \cap A^c \supset \emptyset, \quad A \cup A^c \subset X$$

이것은 <그림 2.5>를 보면 분명하다. 그러나 그 외에는 모두 성립하고 있기 때문에, ($P(X)$, $\subset$, $\cdot^c$, $\cap$, $\cup$)는 완비의부울대수(complete pseudo-Boolean algebra) 체계를 이룬다.

퍼지 집합의 연산은 이외에도 많이 정의할 수 있지만, 그것들 중에서 실용화의 응용이라는 관점으로 중요하다고 생각되는 것에 대해서만 설명한다. 우선, 단항연산으로서는 퍼지 집합 A의 α승(α power : 단, α는 유리수인 매개변수임)이 있고, 이 퍼지 집합의 소속함수를

$$m_{A^\alpha}(x) = \{m_A(x)\}^\alpha, \quad \forall x \in X$$

으로 정의한다. 특히, 잘 사용되는 2승과 1/2승을 도시하면 <그림 2.6>과 같다. 어떤 애매한 정보를 퍼지 집합 A로 표현했을 때 A^2은 폭이 좁고 뾰족하게 되기 때문에 "very A"로, A의 1/2승은 폭이 넓게 퍼지기 때문에 "some what A"에 대응시킨다. 같은 방법으로, 4승과 1/4승도 " A^4 = very very A = (very)^2 A"과 " $A^{1/4}$ some what some what = (some what)^2 A" 등으로 해석하여 자주 사용한다. 단, A가 Crisp 집합이라면 1과 0의 멱승이 되기 때문에 역시 1또는 0의 값을 갖는다. 그러므로 A와 A_α는 같은 것이 되고 정의는 가능하지만 무의미한 연산이 됨을 알 수 있다.

퍼지 집합이론은 집합론의 구조를 갖는 그래프로서 용어에 대한 모호성의 양을 표시하는 작업이다. 이러한 작업을 하는 이유는, "키가 큰" 혹은 "나이 많은"을 집합의 개념으로 표시하고자

하는 시도이다. 이러한 퍼지 집합이론은 인공지능(artificial intelligence), 행동과학(behavioural science), 인간과 기계 시스템(man-machine system) 등의 공학 분야에 많이 응용되어 왔다. 이와 더불어 인간의 주관적 사고에 관한 다양한 문제들이 첨단과학 기술을 개발하는 데 걸림돌이 되어 왔는데, 이러한 걸림돌을 개선해 나가는 데 적극적인 관심을 기울인 학자가 M. Sugeno 교수였다. 그는 1974년 Tokyo Institute of Techology에서 최초로 퍼지 측도와 퍼지 적분을 정의함으로써 퍼지 수학의 선도자가 되었다.

Ⅲ. 퍼지론과 퍼지 전문가 시스템에 관한 고찰

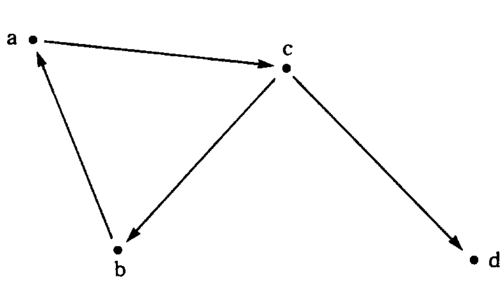
이 절에서 먼저 퍼지 관계에 대해서 살펴보기로 한다. 집합이론에서, Crisp 관계(Crisp relation)는 Crisp 집합 A, B의 곱집합(Cartesian product)의 부분집합 R로 정의된다. 이때 Crisp 관계의 소속함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m_R(x,y)=\begin{cases}1 & \text{if } (x,y)\in R \\ 0 & \text{if } (x,y)\notin R\end{cases}$$

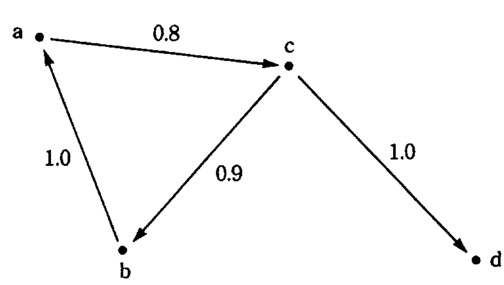
즉, 소속함수를 $A\times B$를 집합 $\{0,1\}$으로 대응시킨다. 이제 퍼지 집합의 개념을 이용하면, 애매한 관계인 퍼지 관계를 생각할 수 있다. 이 퍼지 관계는 순서쌍 (x,y)의 퍼지 집합 R에 대한 소속정도를 나타내는 $[0,1]$의 값을 가진다. 즉,

$$m_R : A\times B \rightarrow [0,1]$$

여기서 $m_R(x,y)$는 소속의 정도를 나타내지만 관계의 정도로 해석되기도 한다. 예를 들면, <그림 3.1>에서와 같이 나타낸 순서쌍의 퍼지 집합을 생각할 수 있다.



(a) Crisp 관계



(b) 퍼지관계 R

그림 3.1.

A \ B	a	b	c	d
a	0	0	1	0
b	1	0	0	0
c	0	1	0	1
d	0	0	0	0

그림 3.2.

A \ B	a	b	c	d
a	0	0	0.8	0
b	1	0	0	0
c	0	0.9	0	1
d	0	0	0	0

그림 3.3.

Crisp 관계를 소속함수로 나타내면

$$m_R(a, c)=1 \qquad m_R(b, a)=1$$

$$m_R(c, b)=1 \qquad m_R(c, d)=1$$

이 되고, 이 관계를 관계행열로 표시하면 <그림 3.2>와 같다.

그리고 퍼지 관계 (b)의 소속함수를 나타내면

$$m_R(a, c)=0.8 \qquad m_R(b, a)=1.0$$

$$m_R(c, b)=0.9 \qquad m_R(c, d)=1.0$$

이 되고, 이 퍼지 관계를 퍼지 관계행열로 표시하면 <그림 3.3>과 같다.

퍼지 관계는 우리가 알고 있는 지식을 표현하는데 많이 이용되고 있다. 또한 동일한 곱집합에 대하여 퍼지 관계가 주어지면, 이 관계들에 대하여 연산을 적용할 수 있다.

정의 3.2 곱집합 $A\times B$에 대하여, 퍼지 관계 R과 S가 주어졌을 때

(1) 퍼지 합관계(fuzzy union relation) $R\cup S$의 소속함수를 다음과 같이 정의한다.

$$m_{R\cup S}(x, y)=m_R(x, y)\vee m_S(x, y), \quad \forall(x, y)\in A\times B$$

(2) 퍼지 교관계(fuzzy intersection relation) $R\cap S$의 소속함수를 다음과 같이 정의한다.

$$m_{R\cap S}(x, y)=m_R(x, y)\wedge m_S(x, y), \quad \forall(x, y)\in A\times B$$

(3) 퍼지 여관계(fuzzy complement relation) $\overline{R}$의 소속함수를 다음과 같이 정의한다.

$$m_{\overline{R}}(x, y)=1-m_R(x, y), \quad \forall(x, y)\in A\times B$$

M_R	a	b	c
1	0.3	0.2	1
2	0.8	1	1
3	0	1	0

M_S	a	b	c
1	0.3	0	0.1
2	0.1	0.8	1
3	0.6	0.9	0.3

그림 3.4.

이와 관련된 예를 들어 보자. <그림 3.4>와 같이 퍼지 관계 R과 S를 퍼지 관계행열 M_R과 M_S로 주어져 있다.

이때, $R\cup S$, $R\cap S$, $\overline{R}$에 대응하는 퍼지 관계행열를 구하여 보자. 퍼지 합관계 $R\cup S$의 퍼지 관계행열 $M_{R\cup S}$, 퍼지 합관계 $R\cap S$의 퍼지 관계행열 $M_{R\cap S}$, 퍼지 관계 R의 퍼지 여관계 $\overline{R}$의 퍼지 관계행열 $M_{\overline{R}}$은 각각 다음 <그림 3.5>, <그림 3.6>, <그림 3.7>과 같다.

$M_{R\cup S}$	a	b	c
1	0.3	0.2	1
2	0.8	1	1
3	0.6	1	0.3

그림 3.5.

$M_{R\cap S}$	a	b	c
1	0.3	0	0.1
2	0.1	0.8	1
3	0	0.9	0

그림 3.6.

$M_{\overline{R}}$	a	b	c
1	0.7	0.8	0
2	0.2	0	0
3	1	0	1

그림 3.7.

이것을 이용한 실용화의 예를 들어 보자. 원소 $\{1,2,3\}$과 $\{a,b,c\}$를 서울 시내 특정 지역이라 하고, R은 "출근 시간에 택시를 타고 1시간 이내에 도착할 수 있는 가능성"을 나타내고, S는 "버스를 타고 1시간 이내에 도착할 수 있는 가능성"을 나타낸다고 가정한다. 그러면 $M_{R(1,a)}=0.3$은 지점 1에서 a까지 택시를 타고 1시간 이내에 도착할 가능성을 나타낸다. 이때 퍼지 합관계 $A\cup B$는 "두 지점 사이에 택시 또는 버스를 타고 1시간 이내에 도착할 가능성"을 나타내고, 퍼지 교집합 $A\cap B$는 "택시와 버스 어느 것을 타도 1시간 내에 도착할 가능성"을 나타낸다. $m_{R\cap S}(2,a)=0.1$이기 때문에 택시 또는 버스 어느 것을 타도 2에서 a까지 1시간 이내에 갈 가능성은 0.1이라 할 수 있다. 한편, 퍼지 여관계 $\overline{R}$은 "택시를 타고 1시간 내에 도착하지 못할 가능성"을 나타낸다. 따라서 $m_{\overline{R}}(1,a)=0.7$은 1에서 a까지 1시간 이내에 가지 못할 가능성이 0.7임을 알 수 있다.

정의 3.2 퍼지 관계 $R\subset A\times B$가 주어지면 이 관계의 퍼지 역관계 R^{-1}의 소속함수를 다음과 같이 정의한다.

$$m_{R^{-1}}(y,x)=m_R(x,y), \quad \forall(x,y)\in A\times B$$

정의 3.3 두 개의 퍼지 관계 R과 S가 다음과 같이 Crisp 집합 A,B,C에 대하여 정의되었다고 하자.

$$R\subset A\times B, \quad S\subset B\times C$$

두 개의 퍼지 관계 R과 S의 합성 $S\cdot R=SR$은 Crisp 집합 A에서 C로의 관계를 나타내고, 이 합성된 퍼지 관계는 다음 소속함수에 의해서 정의된다.

$$m_{S\cdot R}(x,z)=\vee_y\,[m_R(x,y)\wedge m_S(y,z)], \quad \forall(x,y)\in A\times B, \ \forall(y,z)\in B\times C$$

이렇게 구해진 $S\cdot R$은 $A\times C$의 부분집합이 된다. 즉,

$$S\cdot R\subset A\times C$$

퍼지 관계 R과 S를 퍼지 관계행열 M_R과 M_S로 표현하면, 이 두 퍼지 관계의 합성 $S\cdot R$에 대응하는 퍼지 관계행열 $M_{S\cdot R}$을 다음과 같이 정의한다.

$$M_{S\cdot R}=M_R\cdot M_S$$

Crisp 집합 A,B,C는 다음과 같이 나타나는 사건(event)들이라고 하자.

$$A=\{1,\ 2,\ 3\}$$

$$B=\{a,\ b,\ c,\ d\}$$

$$C=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$$

이제 퍼지 관계 $R\subset A\times B$, $S\subset B\times C$를 다음 <그림 3.8>과 같이 퍼지 관계행열로 나타내어질 때, 이 두 퍼지 관계의 합성 $S\cdot R$의 퍼지 관계행열은 <그림 3.9>와 같다.

R	a	b	c	d
1	0.1	0.2	0	1
2	0.3	0.3	0	0.2
3	0.8	0.9	1	0.4

S	α	β	γ
a	0.9	0	0.3
b	0.2	1	0.8
c	0.8	0	0.7
d	0.4	0.2	0.3

그림 3.8.

$S \cdot R$	a	b	c
1	0.4	0.2	0.3
2	0.3	0.3	0.3
3	0.8	0.9	0.8

그림 3.9. 퍼지 관계의 합성

이러한 예를 통해 퍼지 관계 R과 S는 사건(event)또는 사실(fact)이 발생하는 규칙(rule)을 표현한다. 다시 말하면 사건 A가 발생했을 때 사건 B가 나타날 가능성을 규칙 R에 의해 알 수 있다. 그리고 사건 B가 발생했을 때 사건 C가 나타날 가능성을 규칙 C에 의해 알게 된다. 이러한 사건을 토대로, 사건 A가 발생했을 때 사건 C가 나타날 가능성을 합성규칙 $S \cdot R$에 의해서 알 수 있다. 이와 같이 규칙을 적용하여 새로운 사실을 알 수 있도록 하는 것을 추론(inference)이라 한다. 이제 퍼지 이론의 형식을 전제 $R(x)$, 그리고 이것들을 퍼지 관계 $R(x, y)$와 결론 $R(y)$를 이용하여 표현하기로 한다.

전제(premise) :	x는 A'이다.	: $R(x)$
함의(implication) :	만약 x가 A이면 y는 B이다 .	: $R(x, y)$
결론(conclusion) :	y는 B'이다.	: $R(y)$

전제를 나타내는 관계 $R(x)$의 함의를 나타내는 관계 $R(x, y)$를 max-min합성(composition)이라 하면 결론에 해당하는 관계 $R(y)$를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} R(y) &= R(x, y) \circ R(x) \\ &= \max{}_y \ \min{}_x \ \{m_{A'}(x), m_R(x, y)\} \end{aligned}$$

이것은 보통의 추론에서 사실(fact)이 주어지고 규칙(rule)이 주어졌을 때 결론을 도출해 내는 연역 추론(modus ponens) 과정과 같다. 단지 사실과 규칙이 퍼지 관계로 주어졌기 때문에 퍼지 연산을 하여야 한다. 퍼지 추론의 중요한 역할을 하는 함의는 max-min의 합성 중심법이고 현재 퍼지 추론 VLSI 칩 등에서는 거의 이 방식이 채택되고 있다. 그러나 다양하게 함의가 정의될 수 있다. 다음 예제들은 max-min 합성과 다른 방법으로 정의된 함의에 관한 몇 개의 예를 들어 보기로 하겠다.

예제 3.4 표준적인 퍼지 논리연산 NOT="1로부터의 차", OR="max"로 두면 함의는 다음과 같이 정의된다.

$$x_1 \rightarrow x_2 = (1-x_1) \vee x_2$$

퍼지 추론에 적용하면

$$\begin{aligned} m_R(x, y) &= m_{A \cdot B}(x, y) \\ &= (1-m_A(x)) \vee m_B(y) \end{aligned}$$

의 소속함수를 얻는다. 이것은 산업화에 적용해 보는 과정에서 그다지 좋은 결과를 얻지는 못했다.

예제 3.5 루카시비치의 함의(Lukasiewicz imolication)는 다음과 같이 정의된다.

$$x_1 \rightarrow x_2 = (1-x_1+x_2) \wedge 1$$

Zadeh 교수는 초기 이 연산을 이용하여

$$\begin{aligned} m_R(x, y) &= m_{A \rightarrow B}(x, y) \\ &= (1-m_A(x)+m_B(y)) \wedge 1 \end{aligned}$$

로 치환한 퍼지 추론을 제창하였다. 일차 지연계 등의 제어 시스템에 실험하면 상당히 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

스팀 엔진의 자동운전에서 퍼지 제어 실용화에 전망을 밝게 해준 Mamdani 교수는 max-min 합성법을 채택하여 양호한 결과를 얻었다.

이제 퍼지 전문가 시스템을 고찰하기로 하겠다. 퍼지 생산규칙에 의한 퍼지 추론에서 규칙의 수가 I개이고 전제조건의 항목수가 m개 이고, 결론의 항목수가 n개인 일반적인 경우에 대해 설명하기로 하겠다.

$$\{\text{If } A_{i1}=0, A_{i2}=0, \dots, A_{im}=0, \text{ then } B_{i1}=\Delta, B_{i2}=\Delta, \dots, B_{in}=\Delta\}$$

$$\begin{aligned} I &= \text{규칙수} \\ m &= \text{전제조건의 항목수} \\ n &= \text{결론의 항목수} \end{aligned}$$

실용화에서 I는 수개에서 30개 정도(많아도 100개 정도)이고, m 대 n는 2 대 1부터 5 대 2 정도가 많다. Crisp적인 규칙형 전문가 시스템에서는 규칙수가 수백에서부터 수천, 대규모적인 것은 1만 개가 넘는 경우가 있다. 이에 비하면 퍼지의 경우을 보면, 규칙수는 상당히 적음을 알 수 있다. 이러한 이유는 Crisp한 경우와 비교해서 미세한 경우까지 나누어서 각각을 규칙으로 하는 것이 아니라 본질적인 소수의 규칙을 통한 근사적 방법으로 전체를 표현하기 때문이다. 중간의 애매한 평가를 적극적으로 이용한 산업응용의 실용화 시스템은 대부분 퍼지 생산규칙

(fuzzy production rule)을 이용한 규칙형 시스템(rule type system) 혹은 퍼지 관계(fuzzy relation)를 이용한 관계형 시스템(relation type system)이다. 이 두 가지의 이론적 배경은 퍼지 추론의 합성규칙(composition rule of fuzzy interface)으로 동일하다. 그러나 실제로 공학적 알고리즘의 외견상은 상당히 다르기 때문에 산업응용 분야에서는 두 가지를 구별하여 설명한다.

첫째, 관계형 퍼지 추론의 예를 들어 보자. 전제가

"x는 작다"

라는 퍼지 명제이고, 합의(implication)가

"x와 y는 거의 같다"

라는 퍼지 명제로 주어졌다고 하자. 전체집합 $U=\{1,2,3,4\}$에 대해 각 명제의 퍼지 집합을 다음과 같이 정의할 수 있다.

작음 :

A′

수(x)	1	2	3	4
소속정도	1	0.6	0.2	0

거의 같음 :

B

		1	2	3	4
A	1	1	0.5	0	0
	2	0.5	1	0.5	0
	3	0	0.5	1	0.5
	4	0	0	0.5	1

그리고 전제와 조건명제를 $R(x)$=작음, $R(x,y)$=거의 같음과 같이 퍼지 관계로 변환한다. 연산자 ∘를 max-min 합성으로 사용하여

$$R(y)=R(x)\circ R(x,y)=\text{작음}\circ\text{거의 같음}$$

을 계산한다. 그러면 결과는 다음과 같이 퍼지 집합으로 나타난다.

B′

y	1	2	3	4
소속정도	1	0.6	0.2	0

이와 같이 얻은 결론의 퍼지 집합을 우리가 일상적으로 사용하는 언어로 표현하기 위해서는 이 퍼지 집합이 의미하는 바를 잘 나타내는 단어를 선택해야 한다. 이러한 과정을 언어근사(linguistic approximation)라 한다. 이 경우에는 결론 $R(y)$의 소속함수를 볼 때 앞에서 정의한

작음이라는 의미와 동일함을 알 수 있다. 따라서 " y는 작음"이라는 결론을 내려도 될 것이다.

둘째, 규칙성 퍼지 추론의 예를 들어 보자.

"수위가 높게 된다면 밸브를 열 필요가 있다"

와 같은 현장의 전문가 지식이 있다고 하자. 이것은,

"만약 수위가 높다면 밸브를 연다" (1)

와 같이 전제조건과 결론이 퍼지 명제(fuzzy proposition)라는 사실이 중요하다. 즉 "수위(水位)가 몇 m"라든가, "밸브의 회전 각도가 몇도"와 같은 것은 직접 표에 나와 있지 않다. 그러나 현장의 전문가는 그것을 당연히 알고 있을 것이다. 예를 들면 "수위가 높다고 판정하는 것은 몇 m정도일 때 인가"라고 물으면, "대충 2m일 때"와 같은 답을 줄 수 있다. 이때 "1.9m라면 높지 않고 2m라면 높다"와 같은 Crisp적인 해석보다는 예를 들면,

$$\begin{aligned} \text{HIGH} = \; & 0.1/1.5\text{m} + 0.3/1.6\text{m} + 0.7/1.7\text{m} + 0.8/1.8\text{m} \\ + \; & 0.9/1.9\text{m} + 1.0/2.0\text{m} + 1.0/2.1\text{m} + 1.0/2.2\text{m} \end{aligned} \tag{2}$$

와 같은 퍼지 집합으로 해석하는 것이 훨씬 현실적으로 현장의 지식에 가깝다고 볼 수 있다. 똑같이 밸브의 회전각에 대해서도 가령 완전 개방을 90°로 하면,

$$\begin{aligned} \text{OPEN} = \; & 0.1/30^\circ + 0.2/40^\circ + 0.3/50^\circ + 0.5/60^\circ \\ + \; & 0.8/70^\circ + 1.0/80^\circ + 1.0/90^\circ \end{aligned} \tag{3}$$

와 같은 소속함수로 기술할 수 있다. 식 (2),(3)과 같은 구체적인 소속함수를 작성하는 것은 그 시스템을 구축하는 자가 한다. 기본적으로는,

① Q&A(question & answer) 혹은 하나하나 일일이 값을 결정해 간다.

② 현장의 전문가에게 실제로 조작을 하게끔 하고 그 상황을 모니터한 데이터로부터 구성한다.

③ 시뮬레이션 실험으로 양호한 결과를 얻도록 함수치를 수정한다.

와 같은 방법으로 결정한다.

이와 같은 작업을 통해서 소속함수가 결정되면, 지식 베이스로서 계산기에 기억시킬 수 있다. 예를 들면 식 (2)와 (3)은 전체공간의 각 소속을 첨자로 하는 1차원의 배열 정보로서 기억시켜 놓는다. 아무튼 여기에서는 간단히 하기 위해 식 (1)의 단 하나의 퍼지 생산규칙이 지식 베이스에 저장되어 있다고 가정한다. 이 상황에서 현재의 수위를 관측하여,

"현재의 수위는 약간 높다" (4)

라고 관측되었다고 하자. 이 관측 정보에 대해서는, 가령 수위를 직접 양호한 정도로 관측할 수 있다면, 예를 들면 "현재의 수위는 1.7m"와 같이 Crisp 정보를 얻을 수 있다.

그러나 이 시스템의 성격상 아무래도 Crisp적인 정보가 얻어지지 않고, 관측 오차가 예상되어 1.7m의 전후로 다소의 오차가 겹친다든가, 수위 계측 장치를 설치할 수 없고, 탱크의 윗부분을 두드려서 그 방향음으로부터 그 수위를 예측할 수밖에 없는 경우도 현실적으로 많을 것이다. 그 경우에는 식 (4)를,

$$\text{rather HIGH} = 0.5/1.6\text{m} + 1.0/1.7\text{m} + 0.8/1.8\text{m} + 2.0/1.9\text{m} \tag{5}$$

와 같은 퍼지 집합에 의한 관측 정보로서 취급하는게 합리적이다. 이 상황에서 밸브를 어떻게 조작하면 좋겠는가? 즉,

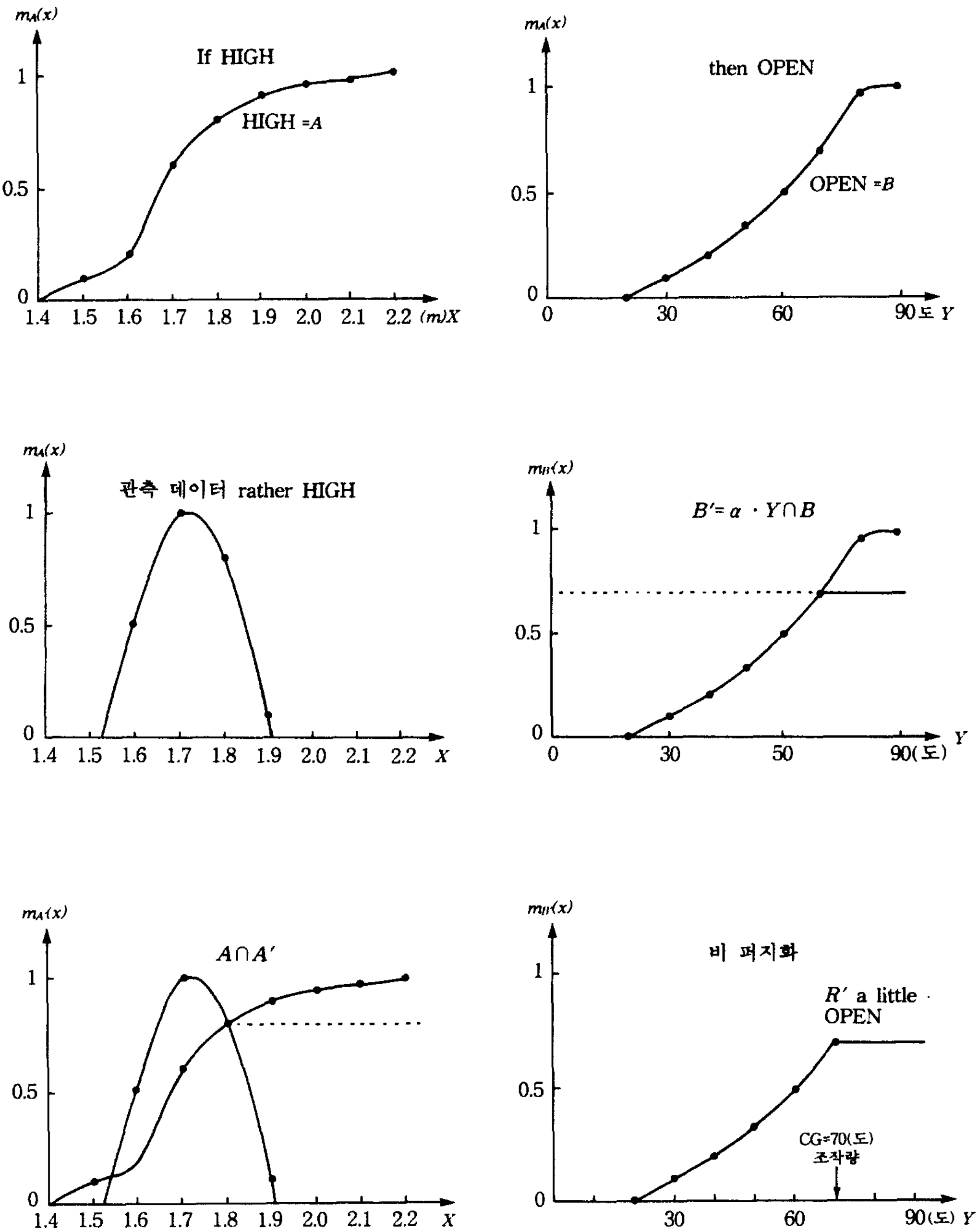
$$\begin{array}{ll} \text{If HIGH} & \text{then OPEN} \\ \text{rather HIGH} & \\ \hline & \end{array} \tag{6}$$

에서 B'가 무엇이 되는가의 문제이다. 당연한 것이겠지만 규칙의 전제조건 HIGH와 관측정보 A′ rather HIGH를 조합하면 된다. 그러나 crisp적인 논리에서는 조합할 수 없기 때문에 crisp 추론은 불가능하다. 그러나 인간이라면 근사조합(approximate matching)을 할 수 있기 때문에,

$$\begin{array}{ll} \text{If HIGH} & \text{then OPEN} \\ \text{rather HIGH} & \\ \hline & \text{a little OPEN} \end{array} \tag{7}$$

으로서 밸브를 조금 연다는 조작을 추론할 수 있다. 인간의 사고, 즉 언어 레벨에서 설명을 하면, 식 (7)이 전형적인 퍼지 추론의 예이다.

이제, 이 결과를 이끌어 내기 위하여 프로그램 혹은 전형적인 퍼지 추론칩 내부에서는 소속함수를 개입시켜서 어떤 계산처리를 하고 있겠는가를 알아보자. 이 언어 레벨의 퍼지 추론을 계산으로 치환하는 방법은 일설에 의하면 100종류 이상 존재하고 있다는 이야기도 있지만, 실용 레벨에서 가장 많이 사용되고 있는 방법은 <그림 3.10>과 같다. 전제 조건의 전체공간은 수위이고, 결론인 전체공간은 밸브 조작 각도이다. 각각 X, Y라고 기술하면 식 (1)의 퍼지 생산규칙을 식 (2), (3)을 사용하여 <그림 3.10>의 윗부분과 같이 도시할 수 있다(데이터 점 사이는 적당히 연결하여 연속 곡선으로 그렸다). 전제조건의 X상의 퍼지 집합 HIGH를 A, 결론 Y상의 퍼지 집합 OPEN을 B라고 기술하여 기호의 간략화를 도모하고 있다. 관측데이터의 X상의 퍼지 집합 A' : rather HIGH는 식 (5)로부터 <그림 3.10>의 2행째와 같이 그릴 수 있다. 같은 그림 3행째는 전형적인 퍼지 추론의 과정을 도시하고 있는 것이고 3행째의 좌측은 규칙의 전제조건 A와 관측 데이터 A'의 근사조합(近似照合)을 $A \cap A'$로 구하고 있다. 그리고 조합의 정도를 $A \cap A'$의 최대치 α라고 생각하기로 하고, 규칙의 결론 B를 조합도 α로 꼭대기를 자르는 방법을 취하고 있다. 여기서 αY는



$m_A(x)$
If HIGH
HIGH =A
1
0.5
0
1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 (m)X
$m_A(x)$
then OPEN
OPEN =B
1
0.5
0
0 30 60 90도 Y
$m_A(x)$
관측 데이터 rather HIGH
1
0.5
0
1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 X
$m_B(x)$
$B' = \alpha \cdot Y \cap B$
1
0.5
0
0 30 50 90(도) Y
$m_A(x)$
$A \cap A'$
1
0.5
0
1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 X
$m_B(x)$
비 퍼지화
R′ a little OPEN
CG=70(도)
조작량
1
0.5
0
30 60 90(도) Y

그림 3.10.

$$m_{aY}(y) = a \text{ for } \forall y \in Y$$

라는 의미이다. 이렇게 해서 현재의 관측 데이터 A'(= rather HIGH)에 대해서 $A \to B$(If HIGH then OPEN)를 적용하여 B'(=a little OPEN)를 구한다. 여기서 추론결과 B'는 <그림 3.10>에 보여주는 것과 같은 Y상의 퍼지 집합이다. 그러나 이대로는 구체적인 조작을 할 수 없다. 즉 B'의 소속함수 $m_{B'}(y)$를 기본으로 해서 Y상의 1점에 조작치를 만들어 놓을 필요가 있다. 그 과정을 일반적으로 비퍼지화(deffuzificationity method : CG)를 채택하고, 조작치의 CG=70(도)가 결정되어 밸브를 70° 회전시키는 것으로 한다.

실제의 연산을 실행할 때에는, 표준적인 max-min 합성중심 계산법으로 행하는 경우, 각 규칙마다의 추론결과를 <그림 3.10>의 B'를 산출하는 방법으로 구하고 그것들의 퍼지 집합(max의 논리합 연산)을 최종 추론 결과로 하는 방법이 자주 이용된다. 즉 모든 규칙을 동시에 이용하는 병렬발화(parallel firing) 방식을 취한다.

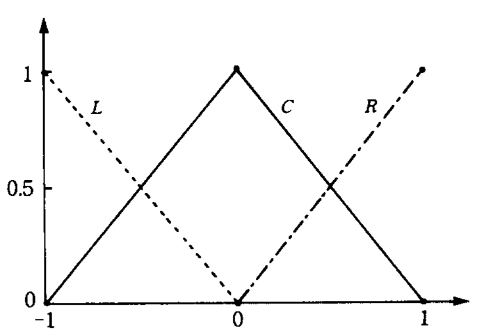
좀더 복잡한 규칙을 갖는 예를 들어 보기로 하겠다. 규칙은 3개로 각 규칙은 전제조건 1항목, 결론도 1항목으로서 다음과 같이 주어졌다고 한다.

R_1: If A is R then B is L

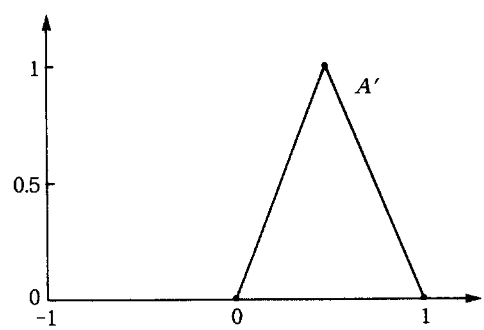
R_2: If A is C then B is C

R_3: If A is L then B is R

여기서 규칙 레벨 R, C, L의 소속함수는 <그림 3.11(a)>와 같이 주어진 것으로 한다. 즉 R, C, L은 각각 오른쪽(right), 중앙(center), 왼쪽(left)이라는



퍼지 레벨 L, C, R의 소속함수



관측정보 A'의 소속함수

그림 3.11(a) 규칙형 퍼지 추론 예제의 기본 데이터

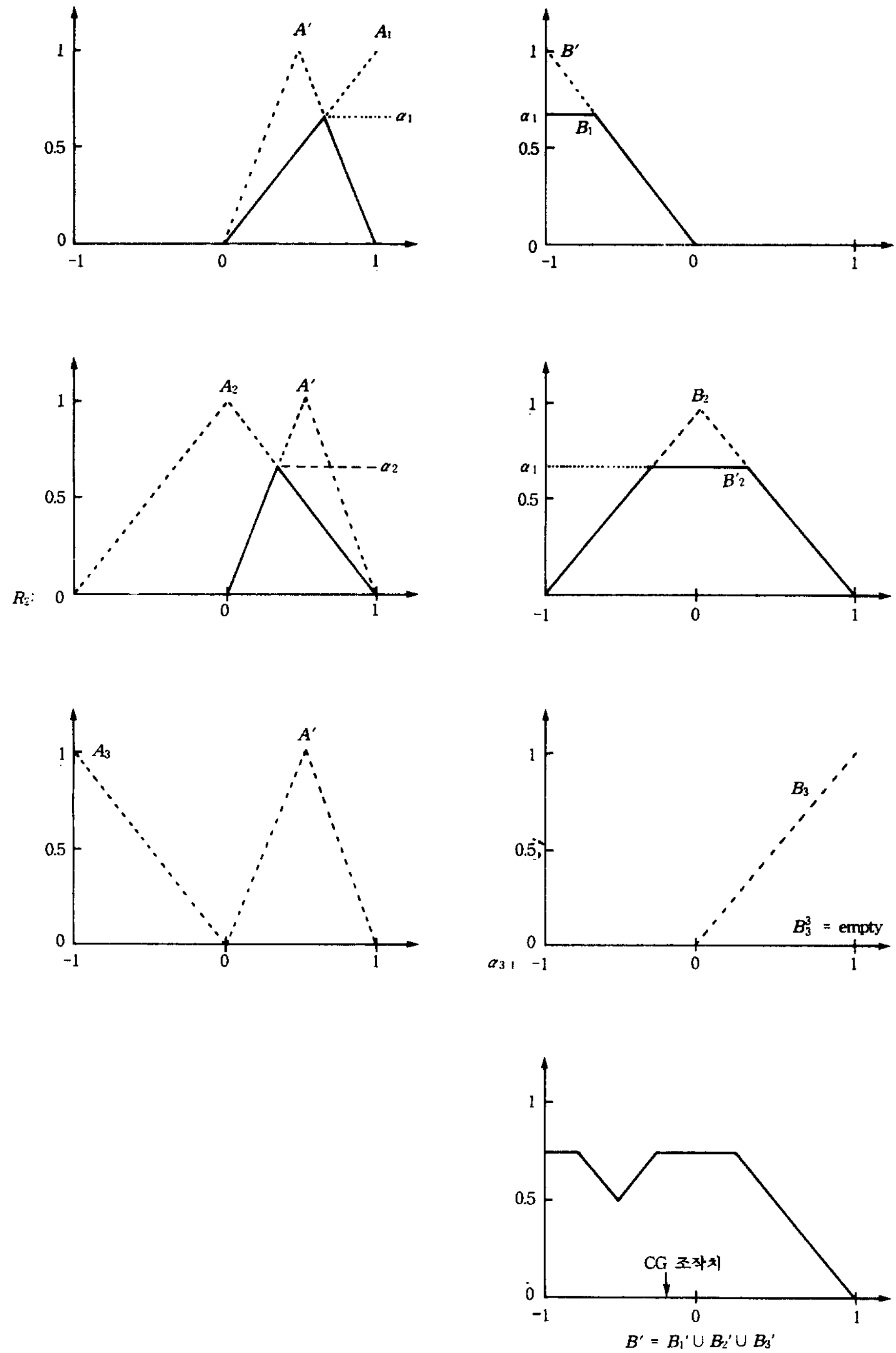


그림 3.11(b) 간단한 퍼지 추론의 예

것이고 R_2의 A'가 들어오면 max-min 합성중심 계산법으로 어떤 응답을 하는 것으로 되겠는가? A'는 우측 0.5에 피크가 있는 "약간 우측"이라는 관측정보이므로 "청개구리"형 규칙으로 "약간 좌"라는 응답을 기대할 수 있다. 실제로 <그림 3.11(b)>와 같이 조작치 CG는 약간 좌측이라는 결과를 얻을 수 있다. 일반의 제어 프로세서 등에서는 어떤 시각에서 A'가 관측되어, <그림 3.11(b)>와 같이 하여 조작치 CG를 결정하여 제어 조작을 실행하고, 다음 시각에서 새로운 A'가 관측되어 다시 <그림 3.11(b)>와 같이 조작치를 결정하여 제어 조작을 하는 순서를 반복 실행하게 된다. 그 제어 시스템이 고속 응답을 요구하는 경우는 A'가 입력될 때부터 CG를 내기까지의 퍼지 추론의 실행시간은 짧지 않으면 안 된다. 그 처리 속도의 단위로서 FLIPS(fuzzy logical inferences per second : 1초당 퍼지 추론 횟수)가 사용된다. 규칙수와, 항목수, 전체공간의 농도에도 의존하지만, 통상 1칩 마이크로 프로세서에 의한 프로그램을 이용하더라도 제법 복잡한 퍼지 시스템을 만들 수 있다.

전문가 시스템은 전문가의 지식을 지식 베이스의 형태로 저장하여, 사용자가 원하는 정보를 추론해 내는 지식기반 시스템이다. 기존의 전문가 시스템은 컴퓨터가 기본적으로 제공하는 이진논리(binary logic) 또는 고전논리(classical logic)에 그 기반을 두고 있다. 그러나 실제적으로 이진논리의 제한성 때문에 전문가의 지식을 효과적으로 표현하지 못하는 어려움이 있다. 이러한 전문가 시스템을 도식적으로 표현하면 <그림 3.12>와 같다.

지식 베이스	⇔	추론 기관	⇔	사용자 인터페이스

그림 3.12. 전문가 시스템의 구성

데이터 베이스가 자료(data)를 저장하는 기능을 하는 데 반해서 지식 베이스는 지식(knowlodge)을 저장하는 기능을 한다. 그리고 추론 기관은 지식 베이스에 저장된 지식(규칙과 사실)을 이용하여 새로운 사실(또는 규칙)을 얻어내는 역할을 하는 부분이다. 이러한 점에서, 퍼지 응용 분야에 종사하는 과학자들은 전문가 시스템(expert system)에 퍼지를 응용하면 그 기능을 크게 향상시킬 수 있으리라는 확신을 갖고 있다. 실제로 퍼지 제어는 극히 초기에 퍼지 전문가 시스템이 성공한 예였고, 현재 실용화를 지향하는 전문가 시스템의 많은 분야에서 퍼지 전문가 시스템으로의 전환을 위해 연구와 투자가 점차 증가하고 있는 실정이다.

전문가 시스템에는 세 가지가 문제가 있다고 되어 있다. (i) 지식표현, (ii) 지식이용, (iii) 지식획득이다. 이들 세 가지 문제의 어느 곳에도 퍼지 이론은 큰 기여를 할 수 있다. (i)은 물론 언어에 의한 표현으로 가장 고도의 것이고, 규칙 지식 · 판단 지식 등은 애매함을 포함한 형태로 표현된다. (ii)는 퍼지 논리가 적용된다. 이때 이용되는 방법은 퍼지 추론이고, 퍼지 추론

의 특징은 애매한 규칙 지식에 의한 애매한 정보를 추론이라는 것이고, 이것들은 전문가의 지식을 이용하는 것이다. 지식은 추론뿐만 아니라 평가 · 판단 등에도 이용된다. 전문가에 의한 평가 · 판단 모델로서는 퍼지 측도와 퍼지 적분이 있다. 예를 들면 사실 · 규칙의 평가에 사용되고 있는 Dempster-Shafer의 신뢰성 함수(belif function)는 퍼지 측도의 하나이다. 그런데 (iii)의 첫째 문제는 전문가의 경험 지식을 찾아내는 것이다. 그때 번번히 지식은 애매한 언어에 의해 단편적으로밖에 전달되고 있지 않기 때문에 퍼지적인 해석이 필요하다. 규칙 지식 하나에 대해 적용조건이 애매한 경우 나누어 설정함으로써 전문가의 지식을 잘 획득할 수 있게 된다. (iii)의 둘째 문제는 전문가에게 직접적으로 지식을 얻는 것이 아니라 간접적으로 전문가의 작업을 관찰하거나 혹은 전문가가 없는 곳에서 실험과 학습 등에 의해 지식을 획득하는 방법이다. 퍼지 전문가 시스템이 유효한 분야에는 제어 이외의 고장 진단, 의료 진단, 스케줄링, 시스템 설계, 경제 예측, 증권 투자, 판매 예측, 경영에 있어서의 의사 결정, 문서 요약, 법률 상담, 여행 상담 등의 컨설테이션 등 수없이 많고, 이들 중에는 아직 개발되지 않은 분야와 조금 연구하여 부분적으로 퍼지 이론을 도입하는 것만으로 큰 효과를 올릴 수 있는 분야가 있다. 소규모 기업의 경영문제 등은 특히 랩탑형의 퍼스널 컴퓨터로 사용할 수 있는 퍼지 전문가 시스템의 출현도 가능하리라 생각한다. 이제 퍼지 시스템에 응용된 예를 들어 보기로 하겠다. 센다이의 시영 지하철의 휘지 제어에는 기본적으로 8비트 프로세서를 규칙수 24에 대해서 10 FLIPS를 실행하고 100미리초마다 3초 후의 차량상황을 예견하여 쾌적한 운전을 실현하였다. 고속응답이 필요한 경우에는 추론 연산의 하드웨어화가 연구되어 이미 몇 종류인가가 시장에 나온 상태이다. 현재 최고속으로 4,000만 FLIPS(빛이 자유공간을 7.5m 진행하는 사이에 1퍼지 추론을 함) 정도의 실현도 가능하게 되었다. 이와 같은 퍼지 추론칩(fuzzy inference chip)은 로봇, 항공기, 로켓의 제어 등에 이용되고 있다. 여러 가지 기술된 퍼지 추론은 전제조건으로부터 결론을 추론하는 전향(前向) 추론(forward reasoning)이다.

참 고 문 헌

1. G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier* 5, 1953, 131-295.
2. A. Kandel, *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*, Addison - Wesley Publishing Company, 1986.
3. M. Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph. D. Dissertation, Tokyto Institute of Technology, 1974.
4. T. Terano, K. Asai and M. Sugeno, Fuzzy System Theory and its Applications, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987.
5. Z. Wang and G. J. Klir, *Fuzzy measures Theory*, New York, 1992.
6. L. A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* 1, 1978,

3-28.
7. 박용선 · 최항식, 퍼지시스템의 응용입문, 대영사, 1990.
8. 이광형 · 오길록, 퍼지 이론 및 응용 I-II, 홍릉 과학 출판사, 1991.